



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2024

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Les fonctions intégrées sont continues sur $[0, 1]$ car $4 - x^2 \geq 3$; tous les nombres u_n sont donc bien définis et positifs.

1. a) En mettant les deux fractions au même dénominateur, l'égalité demandée

équivalait à $1 = a(2 + x) + b(2 - x) = 2(a + b) + (a - b)x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

L'identification des coefficients donne $a - b = 0$ et $2(a + b) = 1$, d'où $a = b = 1/4$.

Réciproquement, ces valeurs vérifient bien l'identité.

1. b) On intègre l'identité précédente. Les logarithmes sont définis puisque $2 - x$ et $2 + x$ sont positifs sur le segment :

$$u_0 = \frac{1}{4}[-\ln(2 - x) + \ln(2 + x)]_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3.$$

2. On reconnaît la dérivée de $4 - x^2$ dans le numérateur :

$$u_1 = \left[-\frac{1}{2} \ln(4 - x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3. a) La linéarité de l'intégrale sur le segment donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n(4 - x^2)}{4 - x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $u_{n+2} = 4u_n - 1/(n+1)$.

3. b) Dans chaque boucle, k est l'indice de la nouvelle valeur calculée : on applique

$$u_k = 4u_{k-2} - 1/(k-1).$$

Python

```
import numpy as np
```

```
def suite(n):
```

```
    if (-1)**n == 1:
```

```

u = np.log(3)/4
for k in range(2, n+1, 2):
    u = 4*u - 1/(k-1)
else:
    u = np.log(2/np.sqrt(3))
    for k in range(3, n+1, 2):
        u = 4*u - 1/(k-1)
return u

```

Le test distingue les indices pairs et impairs ; on part respectivement de u_0 et de u_1 . Les boucles avancent de deux indices et incluent n grâce à la borne exclusive $n+1$. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la boucle est vide et la valeur initiale est renvoyée. Ce code calcule la récurrence en arithmétique flottante : une erreur sur u_k est multipliée par 4 au pas suivant de même parité ; il ne constitue pas un procédé numériquement fiable pour des indices arbitrairement grands.

4. a) Pour $x \in [0, 1]$, on a $3 \leq 4 - x^2 \leq 4$, donc $1/4 \leq 1/(4 - x^2) \leq 1/3$. En multipliant par $x^n \geq 0$ et en intégrant :

$$\frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx.$$

On obtient bien $1/[4(n+1)] \leq u_n \leq 1/[3(n+1)]$.

4. b) Les deux bornes tendent vers 0. Le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow 0$.

4. c) Les termes sont positifs et $u_n \geq 1/[4(n+1)]$. La série harmonique

$$\sum_{n \geq 0} 1/(n+1)$$

diverge, donc le critère de comparaison entraîne la divergence de

$$\sum_{n \geq 0} u_n,$$

avec sommes partielles tendant vers $+\infty$. La convergence de u_n vers 0 n'est qu'une condition nécessaire de convergence de la série.

5. a) Le script représente $3nu_n$, et non u_n . Les points suggèrent $3nu_n \rightarrow 1$, soit la conjecture ③ : $u_n \sim 1/(3n)$. Ce graphique ne démontre pas la limite.

5. b) Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}/(n+1)$ et $x \mapsto 1/(4-x^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Leurs dérivées sont x^n et $2x/(4-x^2)^2$. Une intégration par parties donne :

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx.$$

Le terme en 0 est nul et celui en 1 vaut $1/[3(n+1)]$, ce qui établit l'égalité demandée.

5. c) Posons $I_n = \int_0^1 x^{n+2}/(4-x^2)^2 dx$. Sur le segment, le dénominateur est au moins 9, d'où :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{9} \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{9(n+3)}.$$

Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$.

5. d) La question 5. b) s'écrit $3(n+1)u_n = 1 - 6I_n$. D'après 5. c), ce dernier membre tend vers 1. Ainsi :

$$3nu_n = \frac{n}{n+1}(1 - 6I_n) \rightarrow 1.$$

La conjecture ③ est démontrée : $u_n \sim 1/(3n)$.

Exercice 2

1. a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Elle y est continue, notamment en 0 puisque $xe^{-x^2/2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour $R > 0$, la reconnaissance d'une primitive donne :

$$\int_0^R xe^{-x^2/2} dx = [-e^{-x^2/2}]_0^R = 1 - e^{-R^2/2}.$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, cette intégrale tend vers 1. Sur $] -\infty, 0[$, f est nulle. Ainsi

$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$ et f est une densité. On peut choisir X à valeurs positives ou nulles presque sûrement.

1. b) Si $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $E(T) = 0$ et $V(T) = 1$. Par la formule de Koenig-Huygens, $E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = 1$.

1. c) En écrivant ce moment avec la densité normale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

L'intégrande est paire et positive ; l'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge donc et vaut $\sqrt{2\pi}/2$. Or $|x|f(x) = x^2 e^{-x^2/2}$ pour $x \geq 0$ et vaut 0 sinon. L'intégrale définissant l'espérance converge absolument, et :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Pour $x \geq 0$, la même primitive que dans 1. a) donne :

$$F_X(x) = \int_0^x t e^{-t^2/2} dt = 1 - e^{-x^2/2}.$$

En particulier, $F_X(0) = 0$ et $P(X > 0) = 1$.

3. a) La variable $Z = X^2$ est positive ou nulle, d'où $F_Z(x) = 0$ pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$, puisque $X \geq 0$ presque sûrement :

$$F_Z(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-x/2}.$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$. Ainsi $Z \sim \mathcal{E}(1/2)$.

3. b) Méthode 1 — Transformation d'une exponentielle

Comme $X = \sqrt{Z}$ presque sûrement, on simule une exponentielle de paramètre $1/2$, c'est-à-dire d'échelle 2, puis on en prend la racine carrée :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX():
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

Le nombre renvoyé possède la loi de X . L'argument 2 est l'échelle, et non le paramètre.

Méthode 2 — Inversion avec une uniforme

Si U est uniforme sur $[0, 1[$, alors $1 - U > 0$. Posons $W = \sqrt{-2 \ln(1 - U)}$. Pour $x < 0$, $P(W \leq x) = 0$; pour $x \geq 0$, les équivalences donnent :

$$P(W \leq x) = P(-2 \ln(1 - U) \leq x^2) = P(U \leq 1 - e^{-x^2/2}) = 1 - e^{-x^2/2}.$$

Donc W suit la loi de X . La commande `rd.random()` renvoie une simulation uniforme sur $[0, 1[$; une autre fonction valide est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX_uniforme():
    U = rd.random()
    return np.sqrt(-2*np.log(1-U))
```

La première méthode exploite directement la loi reconnue en 3. a) ; la seconde montre comment construire la simulation à partir d'une uniforme.

4. a) Pour $n \geq 1$, $\sqrt{n} > 0$. Ainsi $G_n(x) = P(X \leq \sqrt{n}x) = F_X(\sqrt{n}x)$. La question 2 donne $G_n(x) = 0$ si $x < 0$ et $G_n(x) = 1 - e^{-nx^2/2}$ si $x \geq 0$.
4. b) Soit Y une variable certaine égale à 0. Sa fonction de répartition vaut 0 sur $] -\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$. Pour $x < 0$, $G_n(x) = 0 = F_Y(x)$. Pour $x > 0$, $nx^2/2 \rightarrow +\infty$, donc $G_n(x) \rightarrow 1 = F_Y(x)$. On a donc convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de F_Y , ce qui prouve $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

Il n'est pas nécessaire que $G_n(0)$ tende vers $F_Y(0)$: 0 est précisément le point de discontinuité de F_Y .

4. c) Pour tout $\varepsilon > 0$, la positivité de Y_n donne :

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) = 1 - G_n(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon^2/2} \rightarrow 0.$$

Il s'agit d'un calcul direct de probabilité ; aucune règle générale de calcul sur des convergences aléatoires n'est nécessaire.

5. a) L'événement $(M_n > x)$ est l'intersection des événements $(X_k > x)$ pour $1 \leq k \leq n$. L'indépendance mutuelle des X_k permet de multiplier les probabilités :

$$P(M_n > x) = \prod_{k=1}^n P(X_k > x) = (1 - F_X(x))^n.$$

Si $x < 0$, cette probabilité vaut 1 ; si $x \geq 0$, elle vaut $e^{-nx^2/2}$. Par complément, la fonction de répartition de M_n est exactement G_n . Donc M_n et Y_n ont la même loi. Cela ne signifie pas que ces variables sont égales sur l'espace probabilisé.

5. b) Les blancs sont `simulX()` et `np.min(X)`. Voici le code complet, avec la fonction appelée :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX():
    return np.sqrt(rd.exponential(2))

def simulM(n):
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

Pour l'entier $n \geq 1$ demandé, la compréhension produit n simulations indépendantes de X et le tableau n'est pas vide. Son minimum suit la loi de M_n . Une simulation fournit un échantillon de cette loi, et non une preuve de la formule de 5. a).

Exercice 3

1. Pour x fixé, on effectue le changement de variable affine $u = x - t$, de dérivée -1 .
Lorsque $t = 0$, $u = x$; lorsque $t = x$, $u = 0$. Toutes les fonctions sont continues sur le segment d'extrémités 0 et x . Avec les bornes orientées, même lorsque $x < 0$, on a :

$$\int_0^x t f(x-t) dt = - \int_x^0 (x-u) f(u) du = \int_0^x (x-u) f(u) du.$$

Les membres intégrés étant égaux pour toute fonction continue f , les égalités $(*)$ et $(**)$ sont équivalentes.

2. a) Posons $A(x) = \int_0^x f(u) du$ et $B(x) = \int_0^x u f(u) du$. Puisque f et $u \mapsto u f(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse donne $A, B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $A'(x) = f(x)$ et $B'(x) = x f(x)$. L'égalité $(**)$ s'écrit $f(x) = 1 + x A(x) - B(x)$. Le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f aussi; en dérivant un produit :

$$f'(x) = A(x) + xf(x) - xf(x) = A(x) = \int_0^x f(u) du.$$

La séparation en deux primitives évite d'utiliser une formule de dérivation sous le signe intégral.

2. b) La fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = A$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'' = A' = f$ sur $\mathbb{R}$.

2. c) Méthode 1 — Équation différentielle du second ordre

L'équation s'écrit $f'' - f = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, à deux racines réelles distinctes 1 et -1 . La résolution des équations différentielles linéaires du second ordre donne toutes les solutions :

$$f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifient bien l'équation.

Méthode 2 — Deux équations du premier ordre

Pour une solution f de classe $\mathcal{C}^2$, posons $h = f' + f$. Alors $h' = f'' + f' = f + f' = h$. Les solutions de cette équation du premier ordre sont $h(x) = Ce^x$, où C est réel. Il reste à résoudre $f' + f = Ce^x$. L'équation homogène donne Be^{-x} et une solution particulière est $(C/2)e^x$, puisque sa dérivée ajoutée à elle-même vaut Ce^x . On obtient $f(x) = (C/2)e^x + Be^{-x}$, donc exactement la même famille en posant $\alpha = C/2$ et $\beta = B$. Toutes ces fonctions vérifient l'équation initiale $f'' = f$ par dérivation. La première méthode applique directement le cours du second ordre ; la seconde décompose ici le problème en deux équations du premier ordre.

2. d) L'égalité initiale évaluée en 0 donne $f(0) = 1$. La formule de 2. a) donne $f'(0) = 0$. Avec l'expression de 2. c), on obtient $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 1/2$.

Toute solution du problème initial est donc nécessairement :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On a pour l'instant établi l'unicité éventuelle; l'existence est vérifiée à la question suivante.

3. Posons $g(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $g'' = g$, $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$. Pour tout réel x , une intégration par parties sur le segment orienté de 0 à x donne :

$$\int_0^x (x-u)g(u) du = \int_0^x (x-u)g''(u) du = [(x-u)g'(u)]_0^x + \int_0^x g'(u) du = g(x) - 1.$$

Le terme entre crochets est nul car $g'(0) = 0$. Donc $1 + \int_0^x (x-u)g(u) du = g(x)$. Par l'équivalence de la question 1, g satisfait aussi (*). L'existence, jointe à l'unicité de 2. d), prouve que g est l'unique solution.

4. Le changement de variable de la question 1 reste valable. De plus, remplacer la constante 1 par 0 ne modifie aucune des dérivations de 2. a) et 2. b). Toute solution est donc encore de classe $\mathcal{C}^2$, vérifie $f'' = f$, et s'écrit $\alpha e^x + \beta e^{-x}$. L'équation initiale donne cette fois $f(0) = 0$, et la formule de f' donne toujours $f'(0) = 0$. Ainsi $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La fonction nulle satisfait effectivement l'égalité. C'est l'unique solution de ce second problème.

Problème

Chaque échange conserve deux boules par urne et deux boules blanches au total. Si A contient i boules blanches, B en contient donc $2 - i$.

1. a) Initialement, A contient exactement une boule blanche. Donc $X_0 = 1$ de façon certaine, et $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.
1. b) Lors de la première épreuve, chaque urne contient une blanche et une noire. Les quatre couples de couleurs tirées ont chacun probabilité $1/4$. Tirer une blanche dans A et une noire dans B laisse 0 blanche dans A . Le couple inverse y laisse 2 blanches.

Deux couleurs identiques y laissent 1 blanche, et il y a deux couples de ce type.

Ainsi :

$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{4}.$$

On en déduit $(a_1, b_1, c_1) = (1/4, 1/2, 1/4)$.

1. c) Pour tout $n \geq 1$, X_n prend nécessairement une et une seule des trois valeurs 0, 1, 2.

Les événements correspondants sont donc deux à deux disjoints et leur réunion est Ω : ils forment un système complet d'événements.

1. d) La somme des probabilités des événements d'un système complet vaut 1, donc $a_n + b_n + c_n = 1$ pour $n \geq 1$. Cette relation reste vraie pour $n = 0$ d'après 1. a). Elle vaut donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) On considère $n \geq 1$, ce qui garantit que les événements conditionnants ont une probabilité non nulle, conformément à l'admission du sujet.

Si $X_n = 0$, l'urne A contient deux noires et B deux blanches : l'échange conduit nécessairement à $X_{n+1} = 1$.

Si $X_n = 2$, le raisonnement inverse conduit encore nécessairement à $X_{n+1} = 1$.

Si $X_n = 1$, chaque urne contient une blanche et une noire. Comme lors de la première épreuve, les quatre couples de tirages donnent les probabilités $1/4, 1/2, 1/4$ pour les états 0, 1, 2.

On a ainsi les neuf probabilités suivantes, la ligne étant l'état i et la colonne l'état j :

$i \backslash j$	0	1	2
0	0	1	0
1	$1/4$	$1/2$	$1/4$
2	0	1	0

La composition des urnes à l'instant suivant ne dépend du passé que par X_n , puisque ce nombre détermine la composition des deux urnes. Les cinq transitions de probabilité non nulle sont exactement les cinq arcs du graphe donné.

2. b) Dans la convention des probabilités en ligne imposée ici :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous ses coefficients sont positifs ou nuls et les sommes des lignes valent respectivement 1, $1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$ et 1. C'est donc bien une matrice de transition.

2. c) Pour $n \geq 1$, on applique la formule des probabilités totales au système complet de 1. c), avec les coefficients précédents :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

3. Avec $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$, les membres de droite donnent $(1/4, 1/2, 1/4)$, qui est bien (a_1, b_1, c_1) . Les trois relations restent donc valables pour $n = 0$. Cette vérification directe ne conditionne pas par les événements de probabilité nulle ($X_0 = 0$) ou ($X_0 = 2$).

4. a) La variable X_{n+1} est bornée, donc admet une espérance. La définition pour une variable à support fini donne :

$$E(X_{n+1}) = 0a_{n+1} + 1b_{n+1} + 2c_{n+1} = b_{n+1} + 2c_{n+1}.$$

4. b) En utilisant les relations valables pour tout $n \geq 0$:

$$E(X_{n+1}) = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + \frac{1}{2}b_n = a_n + b_n + c_n = 1.$$

Ainsi $E(X_{n+1}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. c) Les deux questions précédentes donnent $b_m + 2c_m = 1$ pour tout $m \geq 1$. Pour $m = 0$, $b_0 + 2c_0 = 1$ également. Finalement $b_n + 2c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. a) Méthode 1 — Relations sur les probabilités

Par multiplication ligne-colonne, $U_n V = 2a_n - b_n + 2c_n$. Les relations de 2. c) et 3 donnent :

$$U_{n+1} V = \frac{1}{2}b_n - \left(a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) + \frac{1}{2}b_n = -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n = -\frac{1}{2}U_n V.$$

La suite $(U_n V)$ est donc géométrique de raison $-1/2$, et son premier terme est $U_0 V = -1$.

Méthode 2 — Un vecteur propre utile

Les trois relations de probabilités donnent, en les regroupant, $U_{n+1} = U_n M$. Le produit direct fournit :

$$MV = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}V.$$

Par associativité, $U_{n+1} V = U_n (MV) = -\frac{1}{2}U_n V$, avec toujours $U_0 V = -1$. La première méthode suit les coefficients; la seconde met en évidence le rôle d'un vecteur propre dans l'étude de la chaîne.

5. b) La formule d'une suite géométrique donne :

$$2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

6. Méthode 1 — Trois relations linéaires

Posons $r_n = (-1/2)^n$. En soustrayant $b_n + 2c_n = 1$ de $a_n + b_n + c_n = 1$, on obtient $a_n = c_n$. Puis $b_n = 1 - 2a_n$. La question 5. b) devient alors $4a_n - (1 - 2a_n) = -r_n$, soit $6a_n = 1 - r_n$. Ainsi :

$$a_n = c_n = \frac{1 - r_n}{6}, \quad b_n = \frac{2 + r_n}{3}.$$

La loi de X_n est donc donnée par :

Valeur	0	1	2
Probabilité	$(1 - r_n)/6$	$(2 + r_n)/3$	$(1 - r_n)/6$

Pour $n = 0$, $r_0 = 1$ et l'on retrouve $(0, 1, 0)$; pour $n = 1$, $r_1 = -1/2$ et l'on retrouve $(1/4, 1/2, 1/4)$. Comme $-1/2 \leq r_n \leq 1$, les probabilités sont positives ou nulles, et leur somme vaut 1.

Méthode 2 — Une suite arithmético-géométrique

En remplaçant $a_n + c_n$ par $1 - b_n$ dans la récurrence, on obtient $b_{n+1} = 1 - b_n/2$. Le nombre $2/3$ vérifie $2/3 = 1 - (2/3)/2$; donc $b_{n+1} - 2/3 = -(b_n - 2/3)/2$. Cette suite décalée est géométrique et son premier terme vaut $b_0 - 2/3 = 1/3$. Ainsi $b_n = 2/3 + r_n/3 = (2 + r_n)/3$. Pour $n \geq 1$, $a_n = c_n = b_{n-1}/4 = (2 + r_{n-1})/12$. Puisque $r_{n-1} = -2r_n$, cela donne $a_n = c_n = (1 - r_n)/6$. Pour $n = 0$, ces formules redonnent directement $a_0 = c_0 = 0$. On retrouve donc la même loi complète. La première approche exploite les relations préparées aux questions 4 et 5; la seconde reconnaît une récurrence arithmético-géométrique pour une seule probabilité.

7. Puisque $|-1/2| < 1$, $r_n \rightarrow 0$. On obtient $a_n \rightarrow 1/6$, $b_n \rightarrow 2/3$, $c_n \rightarrow 1/6$. Les trois limites sont positives et de somme 1; elles définissent la loi d'une variable X :

$$P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{3}.$$

Pour les autres entiers k , $P(X_n = k) = P(X = k) = 0$. La caractérisation de la convergence en loi des variables à valeurs entières donne donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

8. a) Pour détailler les produits, la première et la troisième ligne de M^2 sont la deuxième ligne de M , car les première et troisième lignes de M valent $(0, 1, 0)$. Sa deuxième ligne est la combinaison des lignes de M de coefficients $1/4, 1/2, 1/4$. Ainsi :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

En multipliant une ligne (a, b, a) par M , on obtient $(b/4, 2a + b/2, b/4)$. Appliqué aux lignes de M^2 , cela donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/16 & 5/8 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Enfin :

$$2M^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 3/8 & 5/4 & 3/8 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 \end{pmatrix} = M^2 + M.$$

8. b) L'identité précédente signifie que le polynôme $Q(t) = 2t^3 - t^2 - t = t(2t + 1)(t - 1)$ annule M . Si $v \neq 0$ et $Mv = \lambda v$, alors $0 = Q(M)v = Q(\lambda)v$, donc $Q(\lambda) = 0$. Les

seules valeurs propres possibles sont $-1/2, 0, 1$. On vérifie maintenant qu'elles sont toutes réalisées et on calcule chaque espace propre sans déterminant.

Écrivons $v = {}^t(x, y, z)$; alors $Mv = {}^t(y, (x + 2y + z)/4, y)$.

Pour $\lambda = -1/2$, les première et troisième équations donnent $x = z = -2y$. La deuxième devient alors $-y/2 = -y/2$ et n'ajoute aucune condition. Ainsi $E_{-1/2} = \text{Vect}({}^t(2, -1, 2))$.

Pour $\lambda = 0$, on a $y = 0$ et $x + z = 0$. Ainsi $E_0 = \text{Vect}({}^t(-1, 0, 1))$.

Pour $\lambda = 1$, les première et troisième équations donnent $x = y = z$, et la deuxième est satisfaite. Ainsi $E_1 = \text{Vect}({}^t(1, 1, 1))$.

Chacun des trois vecteurs indiqué est non nul : chaque singleton constitue donc une base du sous-espace propre correspondant, et le spectre est exactement $\{-1/2, 0, 1\}$.

8. c) Les colonnes de P sont précisément les trois vecteurs propres de la question précédente, associés à trois valeurs propres distinctes. Elles sont donc linéairement indépendantes. Une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base, donc P est inversible, sans calcul d'inverse ni de déterminant.

8. d) En multipliant les colonnes de P par M , ou en utilisant les égalités propres vérifiées en 8. b), on obtient :

$$MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplier P à droite par la matrice diagonale D revient à multiplier respectivement ses colonnes par $-1/2, 0, 1$; donc :

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = MP.$$

Puisque P est inversible, $M = PDP^{-1}$: M est diagonalisable.

8. e) Les trois coordonnées de la ligne $U_n M$ valent $b_n/4$, $a_n + b_n/2 + c_n$, $b_n/4$. Par les questions 2. c) et 3, elles sont respectivement a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} . Ainsi $U_{n+1} = U_n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. f) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, $M^0 = I_3$ et $U_0 = U_0 M^0$. Si $U_n = U_0 M^n$, alors $U_{n+1} = U_n M = U_0 M^{n+1}$. Donc $U_n = U_0 M^n$ pour tout entier naturel n .
8. g) On utilise la diagonalisation établie en 8. d). On calcule d'abord P^{-1} par le pivot de Gauss, puis les puissances de la matrice diagonale : $D^0 = I_3$, et, pour $n \geq 1$, D^n a pour diagonale $((-1/2)^n, 0, 1)$. On en déduit $M^n = P D^n P^{-1}$ et l'on calcule ensuite $U_n = (0 \ 1 \ 0) P D^n P^{-1}$. Les trois coordonnées de cette ligne sont, dans l'ordre, les probabilités des valeurs 0, 1 et 2 de X_n . On retrouve ainsi la loi de la question 6. Le cas $n = 0$ doit être traité avec $D^0 = I_3$, sans attribuer arbitrairement une valeur à 0^0 .

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule informatique ; exercice 2, questions 3. b) et 5. b) : documentation des commandes de bibliothèques employées, notamment la convention d'échelle de `rd.exponential`. Les questions et les algorithmes d'origine sont conservés.
- Exercice 1, question 5. a) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original. Les 41 points sont calculés avec le code et les paramètres donnés ; leurs valeurs sont des résultats numériques approchés, sans lecture inventée de coordonnées.
- Problème, question 2. a) : le graphe est retranscrit en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les probabilités exactes indiquées sur ses cinq arcs.