



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

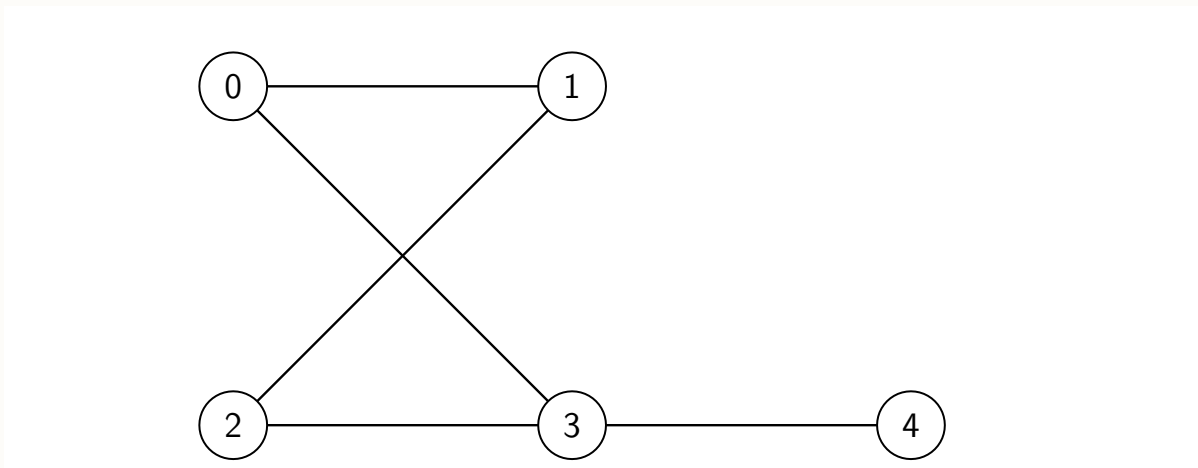
Exercice 1

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques NumPy, `numpy.random` et `numpy.linalg` de Python sont importées avec les commandes respectives suivantes :

Python

```
import numpy as np  
import numpy.random as rd  
import numpy.linalg as al
```

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G . Les lignes et colonnes sont rangées dans l'ordre des sommets 0, 1, 2, 3, 4 ; la ligne et la colonne de rang $i + 1$ correspondent au sommet i .



- 1) Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.
- 2) a) Par lecture du graphe, donner, en listant leurs sommets, les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?
b) On considère la fonction Python suivante :

Python

```
def f(M, k):  
    N = al.matrix_power(M, k)  
    return N
```

La commande `al.matrix_power(M, k)` renvoie la puissance entière k de la matrice carrée M .

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions suivantes :

Python

```
B = f(A, ...)  
n = B[...]  
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2) a).

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G , dont l'élément diagonal situé à la ligne $i + 1$ et à la colonne $i + 1$ est le degré du sommet numéro i , pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On définit également la matrice L , appelée matrice laplacienne de G , en posant $L = D - A$.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

3) a) Déterminer la matrice D .

3) b) Vérifier que l'on a :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4) On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) a) On identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tX LX$?

4) b) Exprimer ${}^tX LX$ en fonction de a, b, c, d, e , puis montrer que l'on a :

$${}^tX LX = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2.$$

4) c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ . Déterminer LX , puis ${}^tX LX$ en fonction de λ, a, b, c, d, e . En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

4) d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5) a) À l'aide de la question 3) b), montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \text{Vect}(U).$$

5) b) Conclure que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

1) Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $K \in]0, 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad (*).$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K -contractante.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) À l'aide de la relation (*), montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|.$$

4) b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

4) c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5) On désigne par n et p des entiers naturels, avec $p \geq 1$.

5) a) Justifier que l'on a :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|.$$

5) b) En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

5) c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

6) Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1 + e^t}.$$

6) a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t .

6) b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f'(t)| \leq \frac{1}{4}.$$

6) c) En déduire que f est $\frac{1}{4}$ -contractante.

6) d) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n . Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

- 6) e) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n , la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

Python

```
def suite(n):
    u = ...
    for k in range(1, n + 1):
        u = ...
    return u
```

- 6) f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5) c), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geq 2000/3$.
- 6) g) En déduire un programme Python, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer que, si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.
- 1) b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
- 2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.
- 2) a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

- 2) b) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ b - a \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire concernant les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} ?$$

2) c) Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

2) d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3) On considère deux variables aléatoires X et Y , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{N}^*$.

3) a) Établir l'égalité :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n).$$

3) b) En déduire explicitement $P(X = Y)$.

4) a) Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable.

- 4) b) On considère le script Python suivant, dans lequel `input` lit la saisie au clavier, `int` la convertit en entier et `rd.geometric(1/2)` simule une loi géométrique de paramètre $1/2$ sur $\mathbb{N}^*$; les tirages sont indépendants. On saisit un entier $m \geq 1$.

Python

```
m = int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c = 0
for k in range(m):
    X = rd.geometric(1 / 2)
    Y = rd.geometric(1 / 2)
    if X == Y:
        c = c + 1
i = 1 - c / m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m , de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c .

- 2) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c .
- 3) Soit t un réel strictement supérieur à 1.
- 3) a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geq 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leq tx)$.
- 3) b) En déduire que la loi de X/t , conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X .

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $] -\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y .

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1 :

- $P(Y > t) > 0$;
- la loi de Y/t , conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y .

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c .

4) Justifier $G(1) = 0$.

5) a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geq 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$

5) b) Justifier que G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

5) c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1.$$

6) Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants. Leur résolution sera établie par les calculs demandés ci-dessous.

6) a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1, +\infty[$.

6) b) En notant K la constante évoquée à la question 6) a), donner toutes les solutions de (E_1) .

6) c) Trouver une fonction u , constante sur $]1, +\infty[$, qui soit solution de l'équation différentielle (E_2) .

6) d) Montrer l'équivalence : h est solution de (E_2) si et seulement si $h - u$ est solution de (E_1) .

6) e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

7) a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

7) b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$, puis conclure quant à la loi de Y .

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8) On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note H sa fonction de répartition.

8) a) Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F .

8) b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

8) c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c):` permettant de simuler X .

On rappelle que `rd.exponential(scale)` simule une loi exponentielle d'espérance `scale`; son paramètre est donc l'inverse de `scale`.