



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) Dans l'ordre 0, 1, 2, 3, 4, le coefficient $A_{i+1,j+1}$ vaut 1 lorsque les sommets i et j sont reliés et 0 sinon. Les arêtes sont $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{3, 4\}$; le croisement des deux diagonales n'est pas un sommet. Le graphe n'a pas de boucle et n'est pas orienté. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) a) Une chaîne de longueur 3 comporte trois arêtes et quatre sommets successifs, avec répétitions autorisées. Les cinq chaînes demandées sont :

$$(2, 1, 0, 3), \quad (2, 1, 2, 3), \quad (2, 3, 0, 3), \quad (2, 3, 2, 3), \quad (2, 3, 4, 3).$$

La première étape part de 2 vers 1 ou 3. Depuis 1, les deux étapes restantes passent par 0 ou 2; depuis 3, elles passent par 0, 2 ou 4. Cette séparation recense toutes les possibilités : il y en a donc 5.

- 2) b) Question adaptée au programme actuel : la commande de puissance matricielle est documentée dans le sujet.

Le coefficient de A^3 correspondant aux sommets 2, 3 compte ces chaînes. Les indices Python commencent à zéro, donc on lit $B[2, 3]$:

Python

```
import numpy as np

import numpy.linalg as al

A = np.array([[0, 1, 0, 1, 0],
              [1, 0, 1, 0, 0],
              [0, 1, 0, 1, 0],
              [1, 0, 1, 0, 1],
              [0, 0, 0, 1, 0]])

def f(M, k):
    N = al.matrix_power(M, k)
    return N

B = f(A, 3)
n = B[2, 3]
print(n)
```

Ce code affiche 5.

3) a) Les degrés des sommets 0, 1, 2, 3, 4 sont respectivement 2, 2, 2, 3, 1. Ainsi :

$$D = \text{diag}(2, 2, 2, 3, 1).$$

Question adaptée au programme actuel. Rectification locale de l'énoncé : les sommets étant numérotés de 0 à 4, leur degré est placé à la ligne et à la colonne de rang $i + 1$. La définition originale évoquait le sommet i avec des indices de 1 à 5 ; cette incohérence d'indices a été corrigée.

3) b) Soustraire A à D conserve les degrés sur la diagonale et place -1 aux positions

des arêtes. On obtient bien :

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3) c) La matrice L est réelle et symétrique : ses coefficients situés symétriquement par rapport à la diagonale sont égaux. Le résultat du programme concernant les matrices symétriques réelles assure qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- 4) a) Les dimensions des facteurs sont respectivement 1×5 , 5×5 et 5×1 . Leur produit appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et est donc identifié à un réel.
- 4) b) Le produit matriciel donne :

$$LX = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par ${}^tX$, on obtient :

$${}^tX LX = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2ad - 2de.$$

Développer les cinq carrés proposés donne les mêmes termes : a, b, c apparaissent dans

deux carrés, d dans trois et e dans un seul. Les termes croisés sont précisément ceux de cette expression. Ainsi :

$${}^tX L X = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2 \geq 0.$$

4) c) Par définition d'un vecteur propre, $X \neq 0$ et $LX = \lambda X$. D'où :

$${}^tX L X = \lambda {}^tX X = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

La somme des carrés des coordonnées est strictement positive puisque $X \neq 0$. Le membre de gauche est positif ou nul d'après 4) b). La division par cette somme strictement positive donne $\lambda \geq 0$.

4) d) Chaque ligne de L a une somme nulle, donc $LU = 0$. Comme $U \neq 0$, le réel 0 est une valeur propre de L . Toutes les valeurs propres étant positives ou nulles et rangées par ordre croissant, $\lambda_1 = 0$.

5) a) Méthode 1 — Résoudre le système demandé

Par la matrice de 3) b), l'égalité $LX = 0$ équivaut au système :

$$\begin{aligned} 2a - b - d = 0, \quad -a + 2b - c = 0, \quad -b + 2c - d = 0, \quad -a - c + 3d - e = 0, \quad e - d \\ = 0. \end{aligned}$$

La dernière équation donne $e = d$. La deuxième donne $c = 2b - a$ et la première $d = 2a - b$. Reportant ces expressions dans la troisième :

$$-b + 2(2b - a) - (2a - b) = 4(b - a) = 0.$$

Ainsi $b = a$, puis $c = d = e = a$; la quatrième équation est alors satisfaite.

Réciproquement, si toutes les coordonnées valent a , alors $X = aU$ et $LX = aLU = 0$.

Donc $LX = 0$ si et seulement si $X \in \text{Vect}(U)$.

Méthode 2 — Utiliser la somme de carrés

Si $LX = 0$, alors ${}^tX LX = 0$. D'après 4) b), une somme de cinq carrés réels est nulle. Chacun de ces carrés est nul ; ainsi $a = b, b = c, c = d, d = a$ et $e = d$. Toutes les coordonnées sont égales, donc $X \in \text{Vect}(U)$. Réciproquement, $X = aU$ implique $LX = aLU = 0$. Cette méthode explique directement le rôle des liaisons du graphe ; la première suit le calcul de système demandé.

- 5) b) Comme L est diagonalisable, il existe une base de cinq vecteurs propres. Les cinq valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ peuvent être lues sur la diagonale de la matrice diagonale correspondante. Si au moins deux d'entre elles étaient nulles, deux vecteurs de cette base appartiendraient au noyau de L , tout en étant indépendants. Cela contredirait $\text{Ker } L = \text{Vect}(U)$, de dimension 1. Une seule valeur de cette liste vaut donc zéro. Avec la positivité de 4) c), on conclut :

$$\lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4 > 0, \quad \lambda_5 > 0.$$

Exercice 2

- 1) On peut choisir $f(x) = x/2$ et $K = 1/2$. Pour tous réels x, y :

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|.$$

Le nombre K appartient bien à $]0, 1[$.

- 2) Fixons $y \in \mathbb{R}$. La relation (*) donne $0 \leq |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Lorsque x tend vers y , le dernier terme tend vers zéro. Par encadrement, $f(x)$ tend vers $f(y)$. La fonction f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- 3) Supposons par l'absurde que x et y soient deux solutions distinctes. Comme $f(x) = x$ et $f(y) = y$, la relation (*) donne $|x - y| \leq K|x - y|$. Or $|x - y| > 0$, donc $1 \leq K$, contrairement à $K < 1$. Il existe ainsi au plus une solution.

- 4) a) Au rang $n = 0$, l'inégalité demandée est une égalité. Supposons qu'elle soit vraie au rang n . La contraction entraîne :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|.$$

La propriété est donc héréditaire, puis vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- 4) b) On prouve directement la convergence par des sommes finies et des suites monotones, sans utiliser un critère général de comparaison de séries comme connaissance préalable.

Posons $d_n = u_{n+1} - u_n$, $C = |u_1 - u_0|$, $d_n^+ = \max(d_n, 0)$ et $d_n^- = \max(-d_n, 0)$. Alors $d_n = d_n^+ - d_n^-$ et $0 \leq d_n^+, d_n^- \leq |d_n| \leq CK^n$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, les deux sommes partielles sont positives, croissantes en N , et vérifient :

$$0 \leq \sum_{n=0}^N d_n^+ \leq C \sum_{n=0}^N K^n = C \frac{1 - K^{N+1}}{1 - K} \leq \frac{C}{1 - K},$$

$$0 \leq \sum_{n=0}^N d_n^- \leq \frac{C}{1 - K}.$$

Par le théorème de convergence des suites croissantes majorées, elles ont chacune une limite finie. Leur différence a donc une limite finie : c'est la convergence de

$$\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n).$$

Or la somme télescopique vaut :

$$\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0.$$

Ainsi u_{N+1} , puis u_n , converge vers un réel a .

4) c) On a $u_n \rightarrow a$ et, par continuité de f , $f(u_n) \rightarrow f(a)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+1} \rightarrow a$, l'unicité de la limite donne $f(a) = a$. Cette existence et l'unicité prouvée en 3) montrent que l'équation possède exactement une solution.

5) a) Pour chaque entier i de n à $n+p-1$, la question 4) a) donne $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0|$. Additionner ces p inégalités fournit exactement l'inégalité demandée.

5) b) Par télescopage et par l'inégalité triangulaire :

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) \right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

La somme géométrique finie vaut

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i = K^n (1 - K^p) / (1 - K),$$

avec $1 - K > 0$. La question précédente donne donc :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

5) c) Fixons n , puis faisons tendre p vers $+\infty$. Alors $u_{n+p} \rightarrow a$ et $K^p \rightarrow 0$, car $0 < K < 1$. La continuité de la valeur absolue et le passage à la limite dans l'inégalité de 5) b) donnent :

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

6) a) L'exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $1 + e^t > 0$ partout. Le quotient définissant f est donc de classe C^2 . Sa dérivée est :

$$f'(t) = -\frac{e^t}{(1 + e^t)^2}.$$

En dérivant cette expression :

$$f''(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}.$$

- 6) b) Le facteur $e^t/(1+e^t)^3$ est strictement positif. Ainsi $f''(t)$ est négative pour $t < 0$, nulle pour $t = 0$ et positive pour $t > 0$. La fonction f' décroît sur $] -\infty, 0]$, puis croît sur $[0, +\infty[$. On a $f'(0) = -1/4$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = 0$, et :

$$f'(t) = -\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Elle reste donc dans $[-1/4, 0[$, ce qui prouve $|f'(t)| \leq 1/4$.

- 6) c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée y vérifie $|f'| \leq 1/4$. L'inégalité des accroissements finis appliquée entre deux réels x, y donne :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

Comme $1/4 \in]0, 1[$, f est bien $1/4$ -contractante.

- 6) d) La fonction f envoie $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$, donc la suite définie à partir de $u_0 = 0$ existe à tous les rangs. Elle relève de 4), avec $K = 1/4$: elle converge donc vers l'unique réel a tel que $a = 1/(1+e^a)$.
- 6) e) La variable u contient le terme courant. Elle est initialisée à $u_0 = 0$; chacune des n itérations applique f :

Python

```
import numpy as np

def suite(n):
    u = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

Pour $n = 0$, la boucle est vide et la fonction renvoie bien u_0 .

6) f) Ici $u_1 = f(0) = 1/2$. En appliquant 5) c) :

$$|a - u_n| \leq \frac{(1/4)^n}{1 - 1/4} \frac{1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 4^n}.$$

Si $4^n \geq 2000/3$, le dernier majorant est inférieur ou égal à 10^{-3} . L'erreur est même strictement inférieure à 10^{-3} puisque l'égalité $4^n = 2000/3$ est impossible : 4^n est entier. Cela justifie la précision demandée.

6) g) On augmente n tant que la condition suffisante n'est pas remplie, puis on calcule `suite(n)` :

Python

```
import numpy as np

def suite(n):
    u = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u

n = 0
while 4 ** n < 2000 / 3:
    n = n + 1
print(suite(n))
```

Le premier rang obtenu est $n = 5$, car $4^4 = 256 < 2000/3 < 1024 = 4^5$. L'affichage est environ 0,4013847045. La borne d'erreur théorique vaut $2/(3 \times 1024) \simeq 0,000651042 < 0,001$.

Exercice 3

1) a) Supposons $a = b$. Si λ est valeur propre, il existe un vecteur non nul $(x, y)^t$ tel que :

$$(a - \lambda)x + y = 0, \quad (a - \lambda)y = 0.$$

Si $\lambda \neq a$, la seconde équation impose $y = 0$, puis la première $x = 0$, contradiction. Toute valeur propre vaut donc a . Réciproquement, ${}^t(A(1, 0)) = a(1, 0)^t$, et $(1, 0)^t \neq 0$: a est bien valeur propre. C'est l'unique valeur propre de A .

1) b) Supposons par l'absurde A diagonalisable. Il existerait une matrice inversible P et une diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Les valeurs diagonales seraient toutes deux l'unique valeur propre a , donc $D = aI_2$. Ainsi $A = P(aI_2)P^{-1} = aI_2$, ce qui contredit son coefficient supérieur droit égal à 1. La matrice A n'est pas diagonalisable.

2) a) Si λ est différente de a et de b , les équations propres :

$$(a - \lambda)x + y = 0, \quad (b - \lambda)y = 0$$

imposent $y = 0$, puis $x = 0$, ce qui est impossible pour un vecteur propre. Il n'existe donc pas d'autre valeur propre que a ou b . Les calculs de 2) b) montrent que ces deux réels sont effectivement valeurs propres : le spectre est $\{a, b\}$.

2) b) On calcule directement :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - a \\ b(b - a) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b - a \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs sont non nuls puisque leur première coordonnée vaut 1. Ils sont donc vecteurs propres, respectivement associés à a et b .

- 2) c) Posons $v = (1, 0)^t$ et $w = (1, b - a)^t$. Si $\alpha v + \beta w = 0$, la seconde coordonnée donne $\beta(b - a) = 0$. Comme $a \neq b$, $\beta = 0$, puis la première donne $\alpha = 0$. Cette famille de deux vecteurs est libre dans un espace de dimension 2, donc c'est une base. Les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées de v, w dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b - a \end{pmatrix}.$$

En particulier, P est inversible. La convention de passage est que P transforme les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en coordonnées dans la base canonique.

- 2) d) Les relations propres de 2) b), lues colonne par colonne, donnent $AP = PD$ pour :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Puisque P est inversible, $D = P^{-1}AP$. La matrice A est donc diagonalisable dès que $a \neq b$.

- 3) a) L'événement $(X = Y)$ est la réunion disjointe, pour $n \in \mathbb{N}^*$, des événements $(X = n) \cap (Y = n)$. Par additivité dénombrable et indépendance de X et Y :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n).$$

La somme est une somme de probabilités positives d'événements disjoints; elle est donc bien définie et inférieure ou égale à 1.

3) b) Pour chaque $n \geq 1$, la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ donne

$P(X = n) = P(Y = n) = (1/2)^n$. D'où, par la somme géométrique de raison $1/4$:

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

4) a) Les questions 1) et 2) donnent l'équivalence : $A(X, Y)$ n'est pas diagonalisable si et seulement si $X = Y$. Par conséquent $p = P(X = Y) = 1/3$.

4) b) Question adaptée au programme actuel : les commandes de saisie et de simulation sont documentées et le domaine $m \geq 1$ est explicité.

Le compteur c est le nombre de couples simulés pour lesquels $X = Y$. Le quotient c / m est donc une fréquence de non-diagonalisabilité. La variable i contient sa fréquence complémentaire et approche :

$$1 - p = \frac{2}{3}.$$

Pour le justifier, notons J_k l'indicatrice de l'égalité lors du k -ième couple de tirages. Ces variables sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$; elles ont espérance $1/3$ et variance $2/9$. Pour

$$I_m = 1 - m^{-1} \sum_{k=1}^m J_k,$$

on a $E(I_m) = 2/3$ et $V(I_m) = 2/(9m)$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour chaque $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|I_m - \frac{2}{3}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2}{9m\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Voici le script complet ; la saisie doit être un entier strictement positif pour que la division soit définie :

Python

```
import numpy.random as rd

m = int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c = 0
for k in range(m):
    X = rd.geometric(1 / 2)
    Y = rd.geometric(1 / 2)
    if X == Y:
        c = c + 1
i = 1 - c / m
print(i)
```

L'affichage dépend des tirages ; il approche $2/3$ et non p . Une réalisation simulée ne prouve pas la valeur exacte.

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

- 1) Puisque $c > 0$, f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, et possède des limites finies à gauche et à droite de 1 : respectivement 0 et c . Pour $B > 1$:

$$\int_1^B \frac{c}{x^{1+c}} dx = [-x^{-c}]_1^B = 1 - B^{-c}.$$

Comme $c > 0$, $B^{-c} \rightarrow 0$ lorsque $B \rightarrow +\infty$. L'intégrale généralisée converge et vaut 1 ; l'intégrale sur $] -\infty, 1[$ est nulle. La fonction f est donc une densité de probabilité.

- 2) Si $x < 1$, la densité est nulle sur $] -\infty, x]$, d'où $F(x) = 0$. Si $x \geq 1$, une intégration sur le segment $[1, x]$ donne :

$$F(x) = \int_1^x \frac{c}{u^{1+c}} du = 1 - x^{-c}.$$

Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident par continuité au seuil 1.

- 3) a) Fixons $t > 1$. On a $P(X > t) = 1 - F(t) = t^{-c} > 0$, donc la probabilité conditionnelle est définie. Si $x < 1$, alors $tx < t$ et les événements $(X > t)$ et $(X \leq tx)$ sont incompatibles : la probabilité vaut 0.

Si $x \geq 1$, l'intersection est $(t < X \leq tx)$, d'où :

$$P_{(X>t)}(X \leq tx) = \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{t^{-c} - (tx)^{-c}}{t^{-c}} = 1 - x^{-c}.$$

Cette expression vaut aussi 0 pour $x = 1$.

- 3) b) Comme $t > 0$, $(X/t \leq x) = (X \leq tx)$. La fonction de répartition conditionnelle obtenue en 3) a) est nulle pour $x < 1$ et égale à $1 - x^{-c}$ pour $x \geq 1$; elle coïncide donc en tout réel avec F . Les deux lois sont identiques.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

- 4) Par la définition de la fonction de répartition et puisque g est nulle avant 1 :

$$G(1) = \int_{-\infty}^1 g(u) du = 0.$$

La valeur éventuelle de la densité au seul point 1 ne contribue pas à l'intégrale. De plus $c = g(1) > 0$, par l'hypothèse de stricte positivité.

- 5) a) Pour $t > 1$, le dénominateur $1 - G(t) = P(Y > t)$ est strictement positif par

hypothèse. Pour $x \geq 1$, l'identité des lois et $t > 0$ donnent :

$$G(x) = P_{(Y>t)}(Y/t \leq x) = P_{(Y>t)}(Y \leq tx) = \frac{P(t < Y \leq tx)}{P(Y > t)} = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$

Au cas $x = 1$, le numérateur et $G(1)$ sont nuls, ce qui confirme la formule au seuil.

- 5) b) La densité g est continue sur $]1, +\infty[$, donc le théorème fondamental de l'intégration assure que G est de classe C^1 sur cet intervalle et $G' = g$. Fixons $t > 1$ et dérivons l'égalité de 5) a) par rapport à $x > 1$. Le dénominateur est une constante non nulle par rapport à x ; la dérivée de $G(tx)$ vaut $tG'(tx)$ puisque $tx > 1$. Il vient :

$$G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

- 5) c) Dans l'égalité précédente, faisons tendre x vers 1 par valeurs supérieures, pour $t > 1$ fixé. On n'affirme pas que G soit dérivable des deux côtés de 1 : on utilise seulement $G'(x) = g(x)$ pour $x > 1$ et la continuité à droite de g en 1. Ainsi $G'(x) \rightarrow g(1) = c$; en outre $G'(tx) = g(tx) \rightarrow g(t) = G'(t)$ par continuité de g en t . D'où :

$$c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)}.$$

Les quantités c et $1 - G(t)$ étant strictement positives, cette égalité équivaut à $c(1 - G(t)) = tG'(t)$, puis à :

$$G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

- 6) a) Question adaptée au programme actuel : la précision ajoutée au sujet impose de s'appuyer sur le calcul guidé de cette identité particulière, sans méthode générale sur les équations à coefficients variables.

Pour $t > 1$, le produit $z(t) = t^c y(t)$ est de classe C^1 et :

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = ct^{c-1} \left(y(t) + \frac{t}{c} y'(t) \right).$$

Comme $ct^{c-1} > 0$, on a $z'(t) = 0$ pour tout $t > 1$ si et seulement si $y(t) + (t/c)y'(t) = 0$

pour tout $t > 1$. Une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $]1, +\infty[$ est constante si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle. Cela prouve l'équivalence demandée.

- 6) b) D'après 6) a), y est solution de (E_1) si et seulement si $t^c y(t) = K$ pour une constante réelle K . Comme $t^c > 0$, les solutions sont exactement :

$$y(t) = Kt^{-c}, \quad t > 1, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ces fonctions sont de classe C^1 sur l'intervalle et la formule de 6) a) vérifie qu'elles sont toutes solutions.

- 6) c) Pour une fonction constante $u(t) = k$, on a $u' = 0$, donc (E_2) se réduit à $k = 1$. La fonction $u(t) = 1$ est donc une solution particulière constante, et c'est la seule solution constante.

- 6) d) Soit h de classe C^1 . La fonction u vaut 1 et sa dérivée est nulle, donc :

$$(h - u) + \frac{t}{c}(h - u)' = h + \frac{t}{c}h' - 1.$$

Le membre de gauche est identiquement nul si et seulement si $h + (t/c)h' = 1$. Cela donne l'équivalence entre $h - u$ solution de (E_1) et h solution de (E_2) , dans les deux sens.

- 6) e) En combinant 6) b), c), d), les solutions de (E_2) sont exactement $h = u + y$, avec $y(t) = Kt^{-c}$. Donc :

$$h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}, \quad t > 1, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Cette forme résulte de l'identité dérivée établie en 6) a) et non d'une formule générale admise pour des coefficients variables.

- 7) a) La fonction G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et satisfait (E_2) par 5) c). Ainsi $G(t) = 1 + Kt^{-c}$ pour une constante K . Comme G est une fonction de répartition d'une variable à densité, elle est continue en 1, et 4) donne $G(1) = 0$. En faisant tendre t vers 1 par valeurs supérieures :

$$0 = 1 + K.$$

Par conséquent $K = -1$ et $G(t) = 1 - t^{-c}$ pour tout $t > 1$.

- 7) b) Au point $t = 1$, la formule donne $1 - 1^{-c} = 0 = G(1)$, donc elle s'étend à $[1, +\infty[$.
 Pour $t < 1$, g est nulle sur $] -\infty, t]$, donc $G(t) = 0$. La fonction de répartition de Y est ainsi exactement celle calculée en partie 1 pour la loi de Pareto de paramètre $c > 0$.
 La variable Y suit cette loi.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

- 8) a) La variable X est au moins égale à 1 avec probabilité 1, donc son logarithme est bien défini avec probabilité 1. La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et l'exponentielle en est la réciproque. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x) = P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x).$$

- 8) b) Si $x < 0$, alors $e^x < 1$ et $H(x) = 0$. Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1$ et :

$$H(x) = 1 - (e^x)^{-c} = 1 - e^{-cx}.$$

Cette fonction de répartition caractérise la loi exponentielle de paramètre $c > 0$. Donc $Z \sim \mathcal{E}(c)$.

- 8) c) Question adaptée au programme actuel : la convention d'échelle de la commande de simulation exponentielle est rappelée dans le sujet.

Méthode 1 — Utiliser l'exponentielle obtenue

Comme $Z = \ln X$, on a $X = e^Z$. On simule une exponentielle de paramètre c , donc d'échelle $1/c$, puis on prend son exponentielle :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX(c):
    z = rd.exponential(1 / c)
    return np.exp(z)
```

Cette fonction s'utilise pour $c > 0$. Le paramètre transmis à `rd.exponential` est une espérance, et non le taux c .

Méthode 2 — Inverser la fonction de répartition

Soit U uniforme sur $[0, 1[$ et posons $T = (1 - U)^{-1/c}$. Le dénominateur est strictement positif dans cette convention, et $T \geq 1$. Pour $x \geq 1$, les puissances positives et les inversions donnent :

$$T \leq x \iff 1 - U \geq x^{-c} \iff U \leq 1 - x^{-c}.$$

Comme $1 - x^{-c} \in [0, 1[$, la loi uniforme donne $P(T \leq x) = 1 - x^{-c}$. Pour $x < 1$, cette probabilité est nulle. La fonction de répartition est bien F , ce qui justifie le code alternatif :

Python

```
import numpy.random as rd

def simulX_uniforme(c):
    u = rd.random()
    return (1 - u) ** (-1 / c)
```

La première méthode réutilise directement la loi identifiée en 8) b). La seconde illustre l'inversion d'une fonction de répartition et vérifie explicitement la loi simulée.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, figure et questions 1), 3) a) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les cinq arêtes et les cinq étiquettes sont conservées. La définition de la matrice des degrés est rectifiée : le sommet $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ correspond à la ligne et à la colonne de rang $i + 1$, ce qui supprime l'incohérence entre sommets numérotés de 0 à 4 et indices de 1 à 5.
- Exercice 1, 2) b) ; exercice 3, 4) b) ; problème, 8) c) : documentation locale ajoutée pour les commandes de bibliothèque et la saisie utilisées ; la condition $m \geq 1$ explicite le domaine requis par la division. Les codes de l'épreuve étaient déjà en Python.
- Problème, 6) : précision ajoutée indiquant que la résolution des deux équations à coefficients variables doit être établie par les calculs guidés des questions. L'identité de dérivation particulière est démontrée intégralement ; aucun théorème général supplémentaire n'est supposé connu. Toutes les sous-questions et les deux équations sont conservées.