



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2022

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que (K_1, K_2, K_3, K_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $\varphi(M) = JM - MJ$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) a) Exprimer $\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$, $\varphi(K_3)$ et $\varphi(K_4)$ comme combinaisons linéaires de K_1, K_2, K_3, K_4 .
- 2) b) Expliquer comment est construite la matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) puis expliciter A .
- 2) c) En déduire que φ est diagonalisable.
- 3) a) Déterminer le rang de A , puis donner une base de $\text{Im}(\varphi)$.
- 3) b) En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$, puis montrer que (I, J) est une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
- 4) a) Calculer A^2 puis montrer que $A^3 - 4A = 0$.
- 4) b) En déduire les valeurs propres possibles de φ .
- 5) La commande Python `np.linalg.matrix_rank(M)` renvoie le rang de la matrice M . La commande `np.eye(4)` construit la matrice identité d'ordre 4 et `print` affiche ses arguments. On a saisi :

Python

```
import numpy as np

A = np.array([[0, -1, 1, 0], [-1, 0, 0, 1],
              [1, 0, 0, -1], [0, 1, -1, 0]])

r1 = np.linalg.matrix_rank(A - 2 * np.eye(4))
r2 = np.linalg.matrix_rank(A + 2 * np.eye(4))

print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

Python a renvoyé $r1 = 3$ et $r2 = 3$. Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres non nulles de φ et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

6) a) Résoudre les systèmes $AX = 2X$ et $AX = -2X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

6) b) Déterminer le spectre de φ ainsi que les sous-espaces propres de φ .

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés $1, 2, \dots, n$, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.

Pour tout entier k de $\{1, \dots, n-1\}$, on dit que le joueur a le niveau k si et seulement s'il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si et seulement s'il a réussi le niveau n , et que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1 .

On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p ,

la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p . Autrement dit, la probabilité de réussir un niveau, sachant que tous les précédents ont été réussis, vaut p .

On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note R_k l'événement : «le joueur réussit le niveau k ».

- 1) Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit les valeurs de p et de n . `input` lit une saisie sous forme de texte; `float` la convertit en réel et `int` en entier. `random()` fournit un tirage uniforme sur $[0, 1[$; les tirages successifs sont indépendants.

Python

```
from numpy.random import random

p = float(input("Entrez la valeur de p dans ]0,1[ : "))
n = int(input("Entrez la valeur de n : "))
X = ...

while ... and random() <= p:
    X = ...

print("Le niveau du joueur est :", X)
```

- 2) a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = \{0, \dots, n\}$.
- 2) b) Déterminer la probabilité $P(X_n = 0)$.
- 2) c) Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = n)$.
- 2) d) Écrire, pour tout entier k de $\{1, \dots, n-1\}$, l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3) Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1.$$

4) a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p .

4) b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

5) a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier $n \geq k + 1$, on a $P(X_n = k) = p^k q$.

5) b) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X .

5) c) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Exercice 3

1) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie, pour tout réel x de $[0, 1]$, par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n .

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

3) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

4) a) Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.

4) b) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leq \gamma \leq 1$.

4) c) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5) a) Déterminer les deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$, puis montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k$.

5) b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

6) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

6) a) Montrer que la suite (T_n) converge et donner sa limite.

6) b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
En déduire que la suite (T_n) est décroissante.

6) c) Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n .

- 7) a) En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n \leq 10^{-3}$.
- 7) b) Déterminer $T_n - S_n$, puis compléter le script Python suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. `log` désigne le logarithme népérien et `print` affiche son argument.

Python

```
from numpy import log

n = 1
s = 1 - log(2)

while ...:
    n = ...
    s = s + ...

print(...)
```

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

- 1) a) Expliquer rapidement pourquoi cette intégrale est bien définie.

- 1) b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

On admet que l'on peut en déduire par récurrence l'égalité

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

- 2) a) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, déterminer $I(p + q, 0)$ puis exprimer $I(p, q)$ en fonction de p et q .

2) b) Montrer enfin que $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^p (1-x)^p dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel quelconque et on pose

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.$$

On considère la fonction b_n définie par $b_n(x) = a_n x^n (1-x)^n$ si $x \in [0, 1]$ et $b_n(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$.

- 3) Montrer que b_n est une densité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

- 4) Reconnaître la loi de X_0 .

- 5) a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que l'on a $E(X_n) = \frac{1}{2}$.

- 5) b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n .

- 5) c) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Partie 3

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n \int_0^x t^n (1-t)^n dt$, où l'on a toujours $a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, i, j) .

- 6) Déterminer $f_0(x)$ pour tout réel x .
- 7) a) Donner la valeur de $f_n(1)$.
- 7) b) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale définissant $f_n(x)$, que $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) + f_n(1-x) = 1$.
- 7) c) En déduire la valeur de $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 8) a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x , l'expression de $f'_n(x)$ en fonction de x et n .
- 8) b) Étudier, suivant la parité de n , le signe de $f'_n(x)$ pour tout réel x .
- 9) a) En utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton, montrer que f_n est une fonction polynomiale puis en déduire les valeurs de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ selon que n est pair ou impair.
- 9) b) Dresser le tableau de variations de f_n , toujours en distinguant les cas n pair et n impair.
- 10) Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- 10) a) Pour tout réel x , déterminer $f_n''(x)$ en fonction de x et n .
- 10) b) En déduire que (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.
- 10) c) Tracer, selon la parité de n , l'allure de (C_n) .