



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2022

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) Les produits de deux matrices d'ordre 2 restent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; φ est donc une application de cet espace dans lui-même. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité donne

$$\varphi(\alpha M + \beta N) = J(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)J = \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(N).$$

Ainsi φ est linéaire, donc un endomorphisme.

- 2) a) Les produits donnent successivement

$$JK_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(K_1) = -K_2 + K_3;$$

$$JK_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(K_2) = -K_1 + K_4;$$

$$JK_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(K_3) = K_1 - K_4;$$

$$JK_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_4J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(K_4) = K_2 - K_3.$$

- 2) b) La colonne numéro j de la matrice représentative est constituée des coordonnées de $\varphi(K_j)$ dans la base ordonnée donnée. Par conséquent,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) c) La matrice A est réelle et symétrique : ${}^tA = A$. Le résultat du programme selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable s'applique. La représentation de φ dans une base est diagonalisable ; φ l'est donc également.
- 3) a) Notons $C_1, \dots, C_4$ les colonnes de A . On a $C_3 = -C_2$ et $C_4 = -C_1$. Les deux premières sont indépendantes : la première coordonnée de $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ impose $\beta = 0$ et la deuxième impose alors $\alpha = 0$. Donc $\text{rg}(A) = 2$.

Les images des vecteurs de la base engendrent l'image. Ainsi

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\text{Im}(\varphi)$.

- 3) b) Le théorème du rang dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 donne $\dim \text{Ker}(\varphi) = 4 - 2 = 2$. Or $\varphi(I) = II - IJ = 0$ et $\varphi(J) = J^2 - J^2 = 0$. Si $\alpha I + \beta J = 0$, l'entrée hors diagonale vaut β , donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. La famille (I, J) est donc libre et contient deux éléments du noyau de dimension 2 ; c'est une base de celui-ci.

4) a) Le calcul matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour expliciter le produit suivant, les lignes de A^2A sont respectivement

$2L_1(A) - 2L_4(A) = 4L_1(A)$, $2L_2(A) - 2L_3(A) = 4L_2(A)$, $-2L_2(A) + 2L_3(A) = 4L_3(A)$ et $-2L_1(A) + 2L_4(A) = 4L_4(A)$. Ici on utilise $L_4(A) = -L_1(A)$ et $L_3(A) = -L_2(A)$. Il vient $A^3 = 4A$, donc $A^3 - 4A = 0$.

4) b) Si λ est une valeur propre de A et $V \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $(A^3 - 4A)V = (\lambda^3 - 4\lambda)V = 0$. Comme $V \neq 0$, $\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$. Les seules valeurs propres possibles de φ sont donc $-2, 0, 2$. Cela n'affirme pas encore que chacune est effectivement valeur propre.

5) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(A - 2I_4) = 4 - 3 = 1$ et $\dim \text{Ker}(A + 2I_4) = 1$. On conjecture donc que 2 et -2 sont valeurs propres et que leurs sous-espaces propres sont de dimension 1. Le calcul numérique de rang reste une indication ; la question suivante fournit la preuve exacte.

Python

```
import numpy as np

A = np.array([[0, -1, 1, 0], [-1, 0, 0, 1],
              [1, 0, 0, -1], [0, 1, -1, 0]])

r1 = np.linalg.matrix_rank(A - 2 * np.eye(4))
r2 = np.linalg.matrix_rank(A + 2 * np.eye(4))
print("r1 =", r1)
```

```
print("r2 =", r2)
```

Les deux sorties sont 3. Le code a été exécuté; il reproduit les rangs annoncés.

6) a) L'équation $AX = 2X$ s'écrit

$$-y + z = 2x, \quad -x + t = 2y, \quad x - t = 2z, \quad y - z = 2t.$$

Les deux équations centrales donnent $z = -y$. La première donne alors $x = -y$ et la deuxième $t = y$; la dernière est satisfaite. Les solutions sont $X = {}^t(y(-1, 1, -1, 1))$ avec $y \in \mathbb{R}$.

L'équation $AX = -2X$ s'écrit

$$-y + z = -2x, \quad -x + t = -2y, \quad x - t = -2z, \quad y - z = -2t.$$

Les équations centrales imposent encore $z = -y$. La première donne $x = y$, puis la deuxième $t = -y$; la quatrième est alors satisfaite. Les solutions sont $X = {}^t(y(1, 1, -1, -1))$ avec $y \in \mathbb{R}$.

6) b) Chaque système admet un vecteur solution non nul, et le noyau de φ contient $I \neq 0$. Les trois valeurs possibles sont donc effectivement valeurs propres. Les coordonnées de M dans la base canonique sont ${}^t(M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22})$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \{-2, 0, 2\},$$

$$E_0(\varphi) = \text{Vect}(I, J),$$

$$E_2(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-2}(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Les dimensions obtenues sont respectivement 2, 1, 1, cohérentes avec la dimension totale 4.

Exercice 2

1) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
from numpy.random import random

p = float(input("Entrez la valeur de p dans ]0,1[ : "))
n = int(input("Entrez la valeur de n : "))
X = 0
while X < n and random() <= p:
    X = X + 1
print("Le niveau du joueur est :", X)
```

X compte les niveaux réussis. Tant qu'il en reste à jouer et que le nouveau tirage correspond à un succès, il augmente de 1. Le premier échec arrête la boucle ; après n succès, la condition $X < n$ l'arrête également. Puisque la loi uniforme est continue, employer $\leq p$ donne la probabilité p . and évalue d'abord la première condition et évite un tirage lorsque $X = n$. Le script a été exécuté avec saisies fournies automatiquement et tirages contrôlés pour les cas arrêt immédiat, succès partiel et succès total ; la simulation ne prouve pas les probabilités exactes.

2) a) Le nombre de niveaux réussis est un entier compris entre 0 et n . Réciproquement, l'échec initial a la probabilité $q > 0$. Pour $1 \leq k < n$, la succession de k succès puis d'un échec a la probabilité $p^k q > 0$ par la formule des probabilités composées, puisque les probabilités conditionnelles de succès valent p . Enfin n succès ont la probabilité $p^n > 0$. Chaque entier de 0 à n est donc effectivement réalisable, ce qui donne $X_n(\Omega) = \{0, \dots, n\}$.

2) b) L'événement $(X_n = 0)$ est $\overline{R_1}$. Par conséquent $P(X_n = 0) = 1 - p = q$.

2) c) Le joueur termine tous les niveaux exactement sur l'événement

$$(X_n = n) = R_1 \cap \dots \cap R_n.$$

La formule des probabilités composées utilise des conditionnements de probabilité strictement positive et donne $P(X_n = n) = p \times \cdots \times p = p^n$.

2) d) Pour $1 \leq k < n$,

$$(X_n = k) = R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}.$$

La probabilité est $p^k q$: les k premiers facteurs valent p et le dernier q . Pour $k = 0$, la même expression numérique vaut $p^0 q = q$, en accord avec 2) b). La loi est donc $P(X_n = k) = qp^k$ pour $0 \leq k < n$, et $P(X_n = n) = p^n$.

3) Comme $p \neq 1$, la somme géométrique finie donne

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = q \sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n = q \frac{1 - p^n}{1 - p} + p^n = 1.$$

4) a) La variable X_n est à support fini, donc elle possède une espérance. En utilisant sa loi,

$$E(X_n) = q \sum_{k=0}^{n-1} kp^k + np^n.$$

4) b) Méthode 1 — Série géométrique dérivée

Pour $0 < p < 1$, la série

$$\sum_{k \geq 1} kp^{k-1}$$

converge et vaut $1/(1-p)^2$. Il en résulte

$$\sum_{k=0}^{n-1} kp^k \rightarrow p/(1-p)^2.$$

Par croissance comparée, $np^n \rightarrow 0$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = q \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}.$$

Méthode 2 — Décomposition en indicatrices

Pour toute réalisation,

$$X_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_n \geq j\}},$$

car le nombre d'entiers j de 1 à n inférieurs ou égaux à X_n est X_n . L'événement $(X_n \geq j)$ signifie que les j premiers niveaux sont réussis, donc a la probabilité p^j . La linéarité de l'espérance dans cette somme finie fournit

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n p^j = \frac{p(1-p^n)}{1-p} \rightarrow \frac{p}{q}.$$

La première méthode exploite directement la loi; la seconde donne en plus une expression exacte simple de l'espérance sans calcul de somme pondérée.

- 5) a) Si $n \geq k+1$, alors $k < n$. La formule de 2) d), y compris lorsque $k=0$, fournit $P(X_n = k) = qp^k$.
- 5) b) Les nombres qp^k , pour $k \in \mathbb{N}$, sont positifs et leur somme vaut $q/(1-p) = 1$. Ils définissent donc la loi d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour chaque entier $k \geq 0$, 5) a) donne $P(X_n = k) \rightarrow P(X = k) = qp^k$. Pour chaque entier négatif, les deux probabilités sont nulles. La caractérisation de la convergence en loi des variables à valeurs entières s'applique : X_n converge en loi vers X .
- 5) c) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = j) = P(X = j-1) = qp^{j-1} = q(1-q)^{j-1}$. Ainsi Y suit la loi géométrique de paramètre q , sur $\mathbb{N}^*$. Cette loi a une espérance finie $E(Y) = 1/q$.

Donc $X = Y - 1$ est intégrable et $E(X) = 1/q - 1 = p/q$. Cette valeur est égale à la limite calculée en 4) b). L'égalité est ici vérifiée par les calculs; elle n'est pas une conséquence générale de la seule convergence en loi.

Exercice 3

- 1) Pour $x \in [0, 1]$, $x + n > 0$ et $f'_n(x) = n/(x + n)^2 > 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0, 1]$, de $f_n(0) = 0$ à $f_n(1) = 1/(n + 1)$.

x	0		1
$f'_n(x)$		+	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$1/(n + 1)$

- 2) La fonction intégrée est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale est définie. La question précédente donne $0 \leq f_n(x) \leq 1/(n + 1)$. En divisant par $n > 0$ puis en intégrant sur un segment de longueur 1, il vient $0 \leq u_n \leq 1/[n(n + 1)]$.
- 3) On raisonne sur les sommes partielles sans utiliser de critère supplémentaire de convergence des séries. Pour tout $N \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \leq 1.$$

Ces sommes partielles sont croissantes car $u_n \geq 0$, et majorées par 1. Le théorème de la limite monotone assure leur convergence. C'est exactement la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n.$$

- 4) a) La suite S_n est la suite des sommes partielles de la série convergente précédente. Elle converge donc vers un réel, noté γ .
- 4) b) La mise au même dénominateur donne $1/n - 1/(n+1) = 1/[n(n+1)]$. Par 2), $0 \leq S_n \leq 1 - 1/(n+1)$. Le passage à la limite préserve l'ordre, donc $0 \leq \gamma \leq 1$.
- 4) c) Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Ainsi (S_n) est croissante. Elle est même strictement croissante puisque la fonction $x \mapsto x/[(n+1)(x+n+1)]$ est strictement positive pour $0 < x \leq 1$, donc son intégrale est strictement positive.
- 5) a) En multipliant l'égalité demandée par $k(x+k) > 0$, elle devient $x = a(x+k) - bk = ax + (a-b)k$. Pour qu'elle soit vraie pour tous x et k , il faut et il suffit que $a = 1$ et $b = 1$. Par intégration,

$$u_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) dx = \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k.$$

- 5) b) En sommant l'égalité précédente de $k = 1$ à n , les logarithmes se compensent successivement. Puisque $\ln 1 = 0$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

- 6) a) Les expressions de T_n et S_n donnent $T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln n = S_n + \ln(1 + 1/n)$. Comme $\ln$ est continue en 1, le dernier terme tend vers 0. Donc $T_n \rightarrow \gamma$.

- 6) b) Pour $t \in [n, n+1]$, on a $1/(n+1) \leq 1/t \leq 1/n$. L'intégration sur ce segment donne

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent $T_{n+1} - T_n = 1/(n+1) - [\ln(n+1) - \ln n] \leq 0$. La suite (T_n) est décroissante.

- 6) c) Une suite croissante convergente est inférieure ou égale à sa limite ; une suite décroissante convergente est supérieure ou égale à sa limite. Les deux suites ayant la même limite, $S_n \leq \gamma \leq T_n$ pour tout $n \geq 1$.
- 7) a) L'encadrement donne $0 \leq \gamma - S_n \leq T_n - S_n \leq 10^{-3}$. Ainsi S_n est une valeur approchée de γ par défaut à 10^{-3} près.
- 7) b) On a $T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n)$. Le script complété est

Python

```
from numpy import log

n = 1
s = 1 - log(2)
while log(1 + 1 / n) > 10 ** (-3):
    n = n + 1
    s = s + 1 / n - log(n + 1) + log(n)
print(s)
```

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Initialement $s = S_1$. Après l'incrémentation de n , on ajoute exactement u_n , donc à chaque contrôle de la condition $s = S_n$. La condition finit par être fausse car $\ln(1 + 1/n) \rightarrow 0$. À la sortie, 7) a) garantit la précision annoncée. L'exécution s'arrête à $n = 1000$ et affiche environ 0,5767160812. La largeur finale est environ 0,0009995003. Ces sorties sont numériques ; la garantie d'erreur vient de l'encadrement démontré.

Problème

Partie 1

1) a) Pour des entiers $p, q \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est polynomiale, donc continue sur le segment $[0, 1]$. Son intégrale $I(p, q)$ est ainsi bien définie.

1) b) Pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$, on intègre par parties avec $u(x) = (1-x)^q$, $u'(x) = -q(1-x)^{q-1}$, $v'(x) = x^p$ et $v(x) = x^{p+1}/(p+1)$. Toutes ces fonctions ont la régularité requise sur $[0, 1]$. Ainsi

$$I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

Le terme de bord est nul car $p+1 > 0$ et $q > 0$. La conséquence

$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$ est admise dans l'énoncé original, y compris pour $q = 0$; elle permet le calcul général de la question suivante.

2) a) Une primitive de x^{p+q} est $x^{p+q+1}/(p+q+1)$, d'où $I(p+q, 0) = 1/(p+q+1)$. En utilisant le résultat donné,

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Cette expression vaut aussi pour $p = 0$ ou $q = 0$, avec $0! = 1$.

2) b) En prenant $q = p$ dans la formule de 2) a), on obtient directement

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p dx = I(p, p) = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Partie 2

3) Le coefficient a_n est strictement positif. Pour $x \in [0, 1]$, $x^n(1-x)^n \geq 0$, donc $b_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et possède des limites finies à gauche et à droite aux points 0 et 1, même pour $n = 0$. Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = a_n I(n, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1.$$

Ces trois propriétés montrent que b_n est une densité conforme au cadre du programme.

4) On a $a_0 = 1$ et $b_0(x) = 1$ sur $[0, 1]$, 0 ailleurs. La variable X_0 suit donc la loi uniforme sur $[0, 1]$.

5) a) Méthode 1 — Calcul par les intégrales de la partie 1

La densité est nulle hors de $[0, 1]$. Sur ce segment, $|x|b_n(x) \leq b_n(x)$; l'intégrale de la valeur absolue converge donc et X_n possède une espérance. On calcule

$$E(X_n) = a_n I(n+1, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n+1)n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Méthode 2 — Symétrie de l'intégrale

L'intégrabilité étant justifiée, le changement affine $u = 1 - x$ sur $[0, 1]$ transforme $E(X_n)$ en $a_n \int_0^1 (1-u)u^n(1-u)^n du = 1 - E(X_n)$. Ainsi $2E(X_n) = 1$ et $E(X_n) = 1/2$.

Le calcul direct réutilise la formule demandée; la symétrie explique pourquoi le résultat est indépendant de n .

5) b) De même, $x^2 b_n(x) \leq b_n(x)$ sur le support; le moment d'ordre 2 existe, donc la variance aussi. Par transfert et 2) a),

$$E(X_n^2) = a_n I(n+2, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n+2)n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors

$$V(X_n) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4 - (2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}.$$

Pour $n = 0$, on retrouve $1/12$, variance de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 5) c) Pour chaque n , le moment d'ordre 2 existe. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement démontre exactement la limite demandée. Aucune hypothèse d'indépendance des X_n n'est nécessaire.

Partie 3

- 6) Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et l'intégrande vaut 1. Donc $f_0(x) = \int_0^x 1 dt = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, y compris pour $x < 0$ avec la convention usuelle des intégrales orientées.

- 7) a) La partie 1 donne $f_n(1) = a_n I(n, n) = 1$.

- 7) b) Le changement de variable affine indiqué $u = 1 - t$ est valable sur tout segment, en respectant l'orientation lorsque $x < 0$. Ses bornes sont $u = 1$ pour $t = 0$ et $u = 1 - x$ pour $t = x$, avec $dt = -du$. Il donne

$$f_n(x) = a_n \int_{1-x}^1 u^n (1-u)^n du.$$

Par la relation de Chasles, valable quels que soient l'ordre et le signe des bornes,

$$f_n(x) + f_n(1-x) = a_n \left(\int_{1-x}^1 u^n(1-u)^n du + \int_0^{1-x} u^n(1-u)^n du \right) = f_n(1) = 1.$$

La courbe admet donc le point $(1/2, 1/2)$ comme centre de symétrie.

7) c) En prenant $x = 1/2$, on obtient $2f_n(1/2) = 1$, donc $f_n(1/2) = 1/2$.

8) a) L'intégrande $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental de l'intégration assure que f_n est dérivable et que $f'_n(x) = a_n x^n(1-x)^n$ sur tout $\mathbb{R}$. Il s'agit ici de la fonction polynomiale sur toute la droite, et non de la densité tronquée b_n hors de $[0, 1]$.

8) b) Si $n = 0$, $f'_0(x) = 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Si $n \geq 2$ est pair, les deux puissances sont positives ou nulles; $f'_n(x) > 0$ pour $x \notin \{0, 1\}$ et s'annule en $0, 1$. Si n est impair, f'_n a le signe de $x(1-x)$: elle est négative sur $] -\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, positive sur $]0, 1[$ et nulle en $0, 1$.

9) a) Le binôme de Newton donne

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^k.$$

En multipliant par t^n puis en intégrant cette somme finie, on obtient

$$f_n(x) = a_n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}.$$

Cette fonction est polynomiale de degré $2n+1$ et son coefficient dominant est $a_n(-1)^n/(2n+1)$. Son degré est impair. Si n est pair, ce coefficient est positif : les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Si n est impair, le coefficient est négatif : les limites sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$.

- 9) b) Pour n pair, y compris $n = 0$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; pour $n \geq 2$, les deux annulations isolées de la dérivée n'affectent pas la stricte croissance. Elle passe par $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(1, 1)$.

x	$-\infty$	0	1/2	1	$+\infty$
$f_n(x), n$ pair	$-\infty$	0	1/2	1	$+\infty$
Sens de variation	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Pour n impair, elle décroît de $+\infty$ à 0 sur $] -\infty, 0]$, croît de 0 à 1 sur $[0, 1]$, puis décroît de 1 à $-\infty$ sur $[1, +\infty[$. Elle admet un minimum local en 0 et un maximum local en 1, sans extremum global.

x	$-\infty$	0	1/2	1	$+\infty$
$f_n(x), n$ impair	$+\infty$	0	1/2	1	$-\infty$
Sens de variation	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

- 10) a) La fonction est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 1$, la dérivation directe donne $f_1''(x) = 6(1 - 2x)$. Pour $n \geq 2$, la règle du produit donne

$$f_n''(x) = a_n n [x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^{n-1}] = a_n n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x).$$

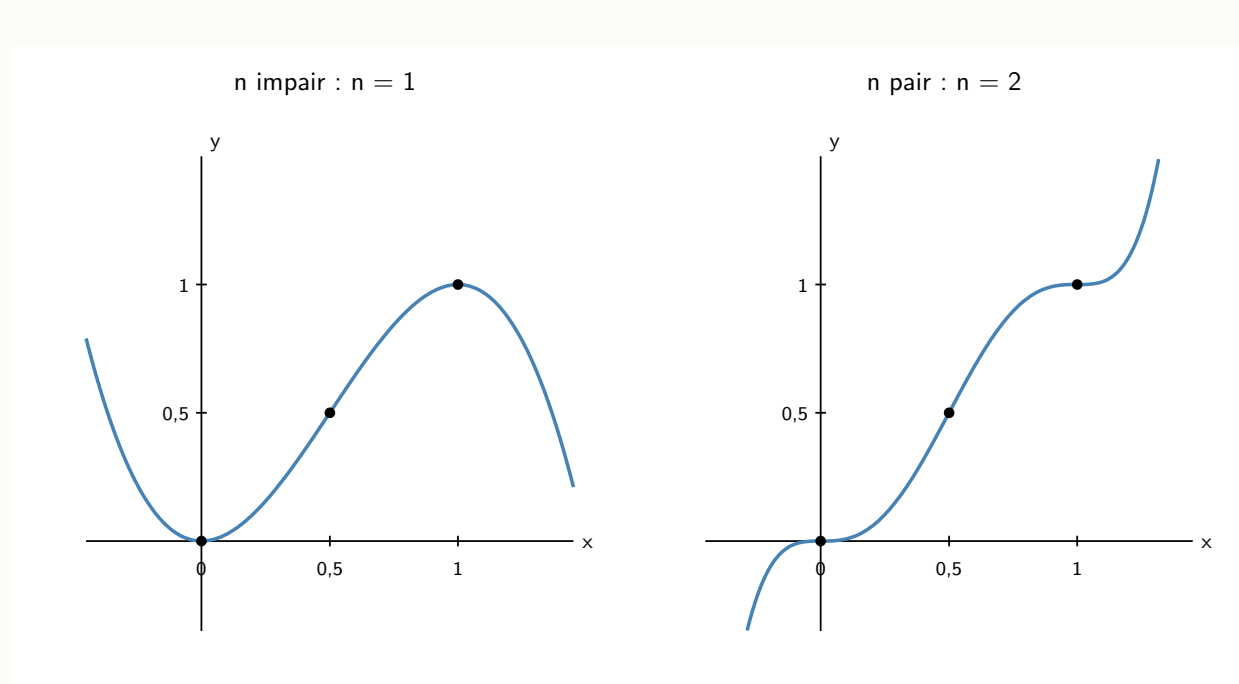
La formule vaut également pour $n = 1$ en interprétant les puissances d'exposant 0 comme les fonctions constantes égales à 1.

- 10) b) Si n est impair, $n - 1$ est pair; le facteur $x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ est strictement positif hors de 0, 1, et ne change pas de signe en ces points. Ainsi f_n'' est positive pour $x < 1/2$, hormis d'éventuelles annulations isolées, et négative pour $x > 1/2$. Le seul

changement de convexité se produit en $1/2$, ce qui fournit l'unique point d'inflexion $(1/2, 1/2)$. Pour $n = 1$, les points $0, 1$ ne sont même pas des zéros de f_n'' .

Si $n \geq 2$ est pair, $n - 1$ est impair. Le signe de f_n'' est successivement $-$, $+$, $-$, $+$ sur les intervalles délimités par $0, 1/2, 1$. Il change donc de signe en chacun de ces trois points, et nulle part ailleurs. Les trois points d'inflexion sont $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(1, 1)$.

- 10) c)** Pour $n \geq 1$, les tangentes en $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont horizontales car $f_n'(0) = f_n'(1) = 0$. En $(1/2, 1/2)$, la tangente a la pente $a_n/4^n > 0$. La symétrie centrale de 7) b), les limites, les variations et les signes de f_n'' déterminent les allures suivantes.



Les panneaux représentent exactement les polynômes $f_1(x) = 3x^2 - 2x^3$ et $f_2(x) = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$, comme représentants des deux parités. Chaque panneau utilise la même unité sur ses deux axes. Pour tout indice impair, on conserve le minimum en 0 , le maximum en 1 et l'unique inflexion centrale ; pour tout indice pair supérieur ou égal à 2 , on conserve la croissance et les trois inflexions. La courbe précise et la pente centrale dépendent de n .

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 5 : Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Le calcul de rang utilise la commande réelle `np.linalg.matrix_rank`, documentée, et les résultats numériques de l'original sont conservés.
- Exercice 2, question 1 : Code adapté en Python, avec conservation des blancs du sujet, des paramètres saisis et du comportement du jeu ; les opérations de saisie et de tirage sont documentées.
- Exercice 3, question 7) b) : Code adapté en Python, avec conservation des blancs du sujet, de l'initialisation et de la mise à jour des sommes partielles.