



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2021

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie 1

1. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ est polynomiale en ses deux variables. Elle est donc de classe C^∞ , en particulier C^2 , sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

2. a) En dérivant par rapport à une variable en tenant l'autre constante, on obtient :

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

b) Un point est critique si et seulement si le gradient est nul, soit $y = x^2$ et $x = y^2$. En remplaçant y dans la seconde égalité, on obtient $x = x^4$, donc $x(x^3 - 1) = 0$. Sur $\mathbb{R}$, cela impose $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux couples correspondants vérifient bien les deux équations : les points critiques sont exactement $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

3. a) Les dérivées secondes sont :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 6x, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 6y, \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = -3.$$

b) Question adaptée au programme actuel : on explicite la méthode de la hessienne et de ses valeurs propres.

Méthode 1 — Valeurs propres de la hessienne

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

En $(0, 0)$, la hessienne est $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ forment une

base de $\mathbb{R}^2$ et vérifient $H_0(1, 1) = -3(1, 1)$ et $H_0(1, -1) = 3(1, -1)$. Ses valeurs propres sont donc -3 et 3 . Elles sont de signes opposés : $(0, 0)$ est un point selle et n'est pas un extremum local.

En $(1, 1)$, la hessienne est $H_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. On a $H_1(1, 1) = 3(1, 1)$ et

$H_1(1, -1) = 9(1, -1)$. Les valeurs propres 3 et 9 sont strictement positives. Comme f est C^2 sur un ouvert contenant ce point critique, le critère du cours donne un minimum local strict en $(1, 1)$, de valeur $f(1, 1) = -1$.

Tout extremum local sur l'ouvert doit être un point critique : aucun autre extremum local n'existe.

Méthode 2 — Comparaisons directes par identités polynomiales

Au voisinage de l'origine, $f(t, t) = t^2(2t - 3) < 0$ pour $0 < |t| < 1$, tandis que $f(t, -t) = 3t^2 > 0$. Ces deux chemins tendent vers $(0, 0)$, où $f = 0$, avec des valeurs de part et d'autre de 0 : aucun extremum n'y est possible.

En posant $x = 1 + h$ et $y = 1 + k$, un développement polynomial exact, sans formule de Taylor à deux variables, donne :

$$f(1 + h, 1 + k) + 1 = 3(h^2 + k^2 - hk) + h^3 + k^3.$$

Or $2|hk| \leq h^2 + k^2$. Si $|h| \leq \frac{1}{2}$ et $|k| \leq \frac{1}{2}$, alors $|h^3 + k^3| \leq \frac{1}{2}(h^2 + k^2)$. Par conséquent,

$$f(1 + h, 1 + k) + 1 \geq \frac{3}{2}(h^2 + k^2) - \frac{1}{2}(h^2 + k^2) = h^2 + k^2.$$

Cette quantité est strictement positive dès que $(h, k) \neq (0, 0)$: le minimum local en $(1, 1)$ est strict. Cette seconde approche explique directement les variations de signe ; la hessienne fournit un critère plus systématique.

4. Sur la droite $y = 0$, on a $f(x, 0) = x^3$. Ainsi $f(x, 0) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$: f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$. Son minimum local de valeur -1 n'est donc pas global. La même droite montre aussi qu'elle n'est pas majorée.

Partie 2

5. On a $g(x) = x^3 - 3x + 1$ et $g'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. La fonction g est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Ses valeurs remarquables sont $g(-1) = 3$ et $g(1) = -1$; ses limites aux deux infinis sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

Pour $n \geq 4$, aucune solution ne se trouve sur $] -\infty, 1]$, où $g \leq 3$. Sur $[1, +\infty[$, g est continue, strictement croissante et son image est $[-1, +\infty[$: le théorème de la bijection assure l'existence et l'unicité d'une solution $u_n > 1$. Comme $g(2) = 3 < n$, on a même $u_n > 2$.

6. a) La fonction h est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. Sa réciproque est donc strictement croissante de $[-1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$; son tableau de variation est :

Argument	-1	$+\infty$
h^{-1}	1	$\nearrow +\infty$

Pour justifier la limite à droite, fixons $A \geq 1$. Dès que $t > h(A)$, la stricte croissance donne $h^{-1}(t) > A$; ainsi $h^{-1}(t) \rightarrow +\infty$.

- b) Pour $n \geq 4$, $u_n = h^{-1}(n)$. D'après la limite précédente, $u_n \rightarrow +\infty$.

c) L'égalité $g(u_n) = n$ s'écrit $u_n^3 - 3u_n + 1 = n$. Comme $u_n > 0$, on peut diviser par u_n^3 :

$$\frac{n}{u_n^3} = 1 - \frac{3}{u_n^2} + \frac{1}{u_n^3} \rightarrow 1.$$

En prenant la racine cubique, continue sur les réels positifs, on obtient $u_n/n^{1/3} \rightarrow 1$. Le réel demandé est donc $\alpha = \frac{1}{3}$. Il est unique : si $u_n \sim n^\alpha$, on aurait $n^{\alpha-1/3} \rightarrow 1$, ce qui impose $\alpha = 1/3$.

Exercice 2

1. a) Question adaptée au programme actuel : le calcul sur segments guide le passage à la borne 0.

La fonction f est positive et continue sur $]0, +\infty[$, et nulle sur $] -\infty, 0]$. Pour $x \rightarrow 0^+$, posons $t = 1/x^2 \rightarrow +\infty$. Alors $f(x) = 2t^{3/2}e^{-t} \rightarrow 0$ par croissance comparée. La limite à droite en 0 est donc finie et égale à la valeur $f(0) = 0$: f est même continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $0 < \varepsilon < R$, la dérivée de e^{-1/x^2} sur le segment considéré vaut $2x^{-3}e^{-1/x^2}$. Par conséquent,

$$\int_{\varepsilon}^R f(x) dx = e^{-1/R^2} - e^{-1/\varepsilon^2}.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ puis $R \rightarrow +\infty$, le second terme tend vers 0 et le premier vers 1.

L'intégrale converge et vaut 1. La fonction f satisfait ainsi les conditions d'une densité de probabilité.

b) Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Si $x > 0$, on utilise le même calcul sur $[\varepsilon, x]$ puis on laisse $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = e^{-1/x^2}.$$

Ainsi $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $F(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$. En particulier, F est continue en 0, puisque $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

2. a) La fonction g est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et possède des limites finies à gauche et à droite en 1, respectivement 0 et 2. Pour $R \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^R g(x) dx = \int_1^R \frac{2}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^R = 1 - \frac{1}{R^2}.$$

La limite lorsque $R \rightarrow +\infty$ est 1. La fonction g est donc une densité de probabilité.

- b) Pour $x < 1$, $G(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, l'intégration précédente donne $G(x) = 1 - 1/x^2$. Ces deux expressions donnent bien $G(1) = 0$ et la continuité en 1.

3. a) L'événement $[M_n \leq x]$ est l'intersection des événements $[X_j \leq x]$, pour $1 \leq j \leq n$. Leur indépendance et l'égalité des lois donnent :

$$G_n(x) = \prod_{j=1}^n P(X_j \leq x) = G(x)^n.$$

Il en résulte $G_n(x) = 0$ si $x < 1$ et $G_n(x) = (1 - 1/x^2)^n$ si $x \geq 1$.

- b) Comme $\sqrt{n} > 0$, on a $[Y_n \leq x] = [M_n \leq \sqrt{n}x]$. Ainsi $F_n(x) = G_n(\sqrt{n}x)$. Si $x < 1/\sqrt{n}$, cette valeur est nulle ; sinon elle vaut $(1 - 1/(nx^2))^n$, ce qui établit exactement la formule demandée. À la borne $x = 1/\sqrt{n}$, elle vaut 0 puisque $n \geq 1$.

4. Pour $x \leq 0$, l'inégalité $x < 1/\sqrt{n}$ est vérifiée pour tout $n \geq 1$. Donc $F_n(x) = 0$ pour tout n et sa limite est 0.

5. a) Si l'entier n est strictement supérieur à $\lfloor 1/x^2 \rfloor$, alors $n > 1/x^2$. Comme $x > 0$, on en déduit $x > 1/\sqrt{n}$. On se situe dans la première branche de la formule de F_n , d'où l'expression annoncée. Sa base $1 - 1/(nx^2)$ est alors strictement positive.

- b)** L'équivalent usuel est $\ln(1 + u) \sim u$ lorsque $u \rightarrow 0$. Pour $x > 0$ fixé, $u = -1/(nx^2) \rightarrow 0$, avec $u > -1$ dès que $n > 1/x^2$. Ainsi

$$\frac{\ln(1 - 1/(nx^2))}{-1/(nx^2)} \rightarrow 1,$$

et donc $n \ln(1 - 1/(nx^2)) \rightarrow -1/x^2$. On revient ensuite à F_n par continuité de l'exponentielle :

$$F_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) \rightarrow e^{-1/x^2}.$$

On n'a pas composé un équivalent avec l'exponentielle : on a d'abord établi la limite de son argument.

- 6.** Pour tout réel $x \leq 0$, la limite de $F_n(x)$ est $0 = F(x)$. Pour tout $x > 0$, elle est $e^{-1/x^2} = F(x)$. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0 d'après la question 1.b. La définition de la convergence en loi donne donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

Exercice 3

Pour alléger les calculs, on note $M = M_a$ et $b = 1 - a$; on a $a > 0$ et $b > 0$.

- 1.** a) La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 1 et a , distincts puisque $a \in]0, 1[$.
- b)** Pour $X = (x, y, z)$, l'équation $(M - I)X = 0$ s'écrit $b(x - y) = 0$ et $b(y - z) = 0$. Comme $b \neq 0$, elle équivaut à $x = y = z$. Ainsi :

$$\text{Ker}(M - I) = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

De même, $(M - aI)X = 0$ donne $bx = 0$, $bx = 0$ et $by = 0$, donc $x = y = 0$ et z libre. Par conséquent :

$$\text{Ker}(M - aI) = \text{Vect}((0, 0, 1)).$$

- c) Chaque sous-espace propre est de dimension 1 et il n'y a que les deux valeurs propres précédentes. Une famille de vecteurs propres ne peut donc engendrer qu'un espace de dimension au plus 2. Il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres; M n'est pas diagonalisable.

2. a) On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b(1+a) & a^2 & 0 \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

Montrons que (I, M, M^2) est libre. Si $\lambda I + \mu M + \nu M^2 = 0$, le coefficient $(3, 1)$ donne $\nu b^2 = 0$, donc $\nu = 0$. Le coefficient $(2, 1)$ donne alors $\mu b = 0$, donc $\mu = 0$. Enfin le coefficient $(1, 1)$ donne $\lambda = 0$. La famille engendre E par définition : c'est une base de E et $\dim E = 3$.

b) Le produit matriciel donne :

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, les lignes de JK^2 sont respectivement la ligne nulle, la différence des deux

premières lignes de K^2 , puis la différence de ses deuxième et troisième lignes.

Or $M - I = bJ$ et $M - aI = bK$. Ainsi $(M - I)(M - aI)^2 = b^3 JK^2 = 0$.

- c) En développant le produit précédent, les facteurs étant des polynômes en M et donc commutant, on obtient :

$$M^3 - (2a + 1)M^2 + a(a + 2)M - a^2I = 0.$$

D'où $M^3 = (2a + 1)M^2 - a(a + 2)M + a^2I \in E$. Ce résultat découle du calcul explicite demandé, sans théorie supplémentaire sur les matrices.

3. a) Pour $n = 0$, $M^0 = I$, donc $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 1)$. Supposons une écriture établie au rang n . En multipliant par M et en remplaçant M^3 par l'expression de la question précédente, on obtient :

$$M^{n+1} = ((2a + 1)u_n + v_n)M^2 + (-a(a + 2)u_n + w_n)M + a^2u_nI.$$

La récurrence donne l'existence pour tout n . L'unicité provient de ce que (M^2, M, I) est une base de E . Par identification des coefficients dans cette base :

$$u_{n+1} = (2a + 1)u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -a(a + 2)u_n + w_n, \quad w_{n+1} = a^2u_n.$$

- b) Code adapté en Python.

Au début d'un tour, les trois variables doivent représenter u_k, v_k, w_k pour un même indice. Or la première affectation écrase u par sa nouvelle valeur. La seconde utilise donc déjà u_{k+1} au lieu de u_k ; la troisième utilise elle aussi u_{k+1} au lieu de u_k .

Par exemple, pour $n = 1$, le script part de $(0, 0, 1)$ et arrive correctement à $(0, 1, 0)$. Au deuxième tour, il donne $u = 1$ puis $v = -a(a + 2)$ et $w = a^2$, alors que les récurrences exigent $(u_2, v_2, w_2) = (1, 0, 0)$. L'erreur est donc effective dès $n = 2$, puisque $a > 0$.

- c) Code adapté en Python. On sauvegarde les anciennes valeurs avant de calculer les nouvelles. Le script complet corrigé est :

Python

```
n = int(input('entrez une valeur pour n : '))
a = float(input('entrez une valeur pour a : '))
u = 0.0
v = 0.0
w = 1.0
for k in range(1, n + 1):
    ancien_u = u
    ancien_v = v
    ancien_w = w
    u = (2*a + 1)*ancien_u + ancien_v
    v = -a*(a + 2)*ancien_u + ancien_w
    w = a*a*ancien_u
print(u, v, w)
```

À chaque tour, les trois nouvelles valeurs sont calculées uniquement à partir du triplet précédent. Après n tours, les variables représentent bien u_n, v_n, w_n ; si $n = 0$, la boucle est vide et le triplet initial est conservé. Le domaine d'utilisation est $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]0, 1[$.

4. En appliquant les relations de la question 3.a avec les indices adaptés, on écrit :

$$u_{n+3} = (2a + 1)u_{n+2} + v_{n+2},$$

$$v_{n+2} = -a(a + 2)u_{n+1} + w_{n+1}, \quad w_{n+1} = a^2u_n.$$

En substituant les deux dernières égalités dans la première, on obtient exactement la récurrence demandée :

$$u_{n+3} = (2a + 1)u_{n+2} - a(a + 2)u_{n+1} + a^2u_n.$$

L'expression $u_n = ((n - 1)a^n - na^{n-1} + 1)/(a - 1)^2$ est admise par l'énoncé ; elle sera utilisée pour étudier la limite. Elle est définie même pour $n = 0$, car $a > 0$.

5. a) Comme $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$ et $na^n \rightarrow 0$ par croissance comparée : on peut écrire $a^n = e^{-cn}$ avec $c = -\ln a > 0$. On a aussi $na^{n-1} = (na^n)/a \rightarrow 0$, puisque a est fixé et non nul. La formule admise donne :

$$u_n \longrightarrow \frac{1}{(a - 1)^2}.$$

On tire de $u_{n+1} = (2a + 1)u_n + v_n$ l'égalité $v_n = u_{n+1} - (2a + 1)u_n$, d'où :

$$v_n \longrightarrow \frac{-2a}{(a - 1)^2}.$$

Enfin, pour $n \geq 1$, $w_n = a^2u_{n-1}$, donc :

$$w_n \longrightarrow \frac{a^2}{(a - 1)^2}.$$

Tous les dénominateurs sont non nuls puisque $a \neq 1$.

b) Méthode 1 — Décomposition dans la base de E

Les trois limites existent ; le résultat de passage à la limite admis dans l'énoncé s'applique. On obtient :

$$L_a = \frac{M^2 - 2aM + a^2I}{(a - 1)^2} = \frac{(M - aI)^2}{(a - 1)^2}.$$

Or $M - aI = bK$ et $(a - 1)^2 = b^2$. Ainsi $L_a = K^2$, soit :

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Calcul direct des coefficients des puissances

Cette méthode illustre la convergence coefficient par coefficient sans utiliser l'expression admise de u_n . Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On a $Me_3 = ae_3$, donc $M^n e_3 = a^n e_3$. De plus, $Me_2 = ae_2 + be_3$. Une récurrence donne :

$$M^n e_2 = a^n e_2 + nba^{n-1} e_3.$$

En effet, en multipliant cette expression par M , le coefficient de e_3 devient $a^n b + nba^n = (n+1)ba^n$, comme requis au rang suivant. La formule est aussi vraie pour $n = 0$, son deuxième terme étant nul.

Enfin $M(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$, donc M^n conserve aussi ce vecteur. On en déduit la première colonne en retranchant les deux autres :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a^n & a^n & 0 \\ 1 - a^n - nba^{n-1} & nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}.$$

Les limites $a^n \rightarrow 0$ et $na^{n-1} \rightarrow 0$ donnent à nouveau la matrice L_a ci-dessus. La première méthode suit les dépendances du problème ; la seconde explique explicitement

l'évolution de chaque colonne.

- c) Pour tout (x, y, z) , $L_a(x, y, z) = (x, x, x)$. Une seconde application donne encore (x, x, x) . Ainsi $L_a^2 = L_a$; on peut aussi le vérifier immédiatement par multiplication matricielle.
6. a) Si $x \in \text{Ker}(f_a - \text{Id})$, la question 1.b donne un réel t tel que $x = (t, t, t)$. La matrice de φ_a étant L_a , on a $\varphi_a(x) = (t, t, t) = x$.
- b) La matrice $M - I$ a pour colonnes $(0, b, 0)$, $(0, -b, b)$ et $(0, 0, -b)$. Toutes ont leur première coordonnée nulle; les deux premières sont libres puisque $b \neq 0$. Son image est donc le plan $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Pour tout vecteur $x = (0, y, z)$ de ce plan, $\varphi_a(x) = L_a(0, y, z) = 0$. Le résultat est donc établi directement à partir des matrices, sans utiliser une théorie de décomposition des endomorphismes.

Problème

Question adaptée au programme actuel : le préambule précise l'indépendance de tous les lancers et définit les variables des manches éventuelles. Le jeu et les questions sont conservés.

Partie 1 : un jeu naïf

1. a) Chacun des joueurs répète indépendamment une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p , jusqu'au premier succès. Par conséquent X_1 et Y_1 suivent la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$:

$$\forall i \geq 1, \quad P(X_1 = i) = P(Y_1 = i) = pq^{i-1}.$$

Ils sont indépendants puisque les deux suites de lancers le sont. Pour tout entier $m \geq 1$, $P(X_1 > m) = q^m$ et $P(Y_1 > m) = q^m$. L'événement « au moins un joueur n'obtient jamais pile » est inclus, pour tout m , dans $[X_1 > m] \cup [Y_1 > m]$, de probabilité au plus

$2q^m$. Comme $0 < q < 1$, cette majoration tend vers 0 : cet événement est de probabilité nulle. La première manche ne dure donc pas éternellement, presque sûrement. Le même résultat pour chaque manche est admis dans la suite.

b) L'égalité a lieu lorsque les deux premiers piles arrivent au même lancer :

$$E_1 = [X_1 = Y_1].$$

c) Méthode 1 — Décomposition selon le rang commun

Les événements $[X_1 = i, Y_1 = i]$, pour $i \geq 1$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est E_1 . L'additivité et l'indépendance de X_1, Y_1 donnent :

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i, Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i).$$

Cette série positive est géométrique de raison $q^2 \in]0, 1[$; sa somme vaut :

$$P(E_1) = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q},$$

car $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$.

Méthode 2 — Décomposition selon le premier lancer

Notons $r = P(E_1)$. Si les deux pièces donnent pile au premier lancer, de probabilité p^2 , il y a égalité. Si elles donnent deux résultats différents, il ne peut plus y avoir égalité du rang du premier pile. Enfin, si elles donnent toutes deux face, de probabilité q^2 , les lancers futurs, indépendants des premiers, reproduisent la même expérience avec une probabilité d'égalité r . La formule des probabilités totales donne donc $r = p^2 + q^2 r$. Comme $1 - q^2 > 0$, on retrouve $r = p^2 / (1 - q^2) = p / (1 + q)$. Cette méthode exploite la répétition de l'expérience, tandis que la première détaille tous les rangs possibles.

- d) Échanger les noms des deux joueurs conserve toutes les probabilités et échange G_1 et H_1 : ces événements sont donc équiprobables. Les trois issues G_1, H_1, E_1 couvrent presque sûrement la première manche. Ainsi :

$$P(G_1) = \frac{1 - P(E_1)}{2} = \frac{1 - p/(1+q)}{2} = \frac{q}{1+q}.$$

2. a) Pour que A gagne le jeu à la manche $n \geq 2$, il faut et il suffit qu'il y ait égalité dans les $n - 1$ premières manches, puis que A obtienne pile avant B à la manche n . Donc :

$$G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \right) \cap [X_n < Y_n].$$

- b) Posons $r = p/(1+q)$. Les lancers préparés pour la manche k sont indépendants de ceux des manches précédentes ; la probabilité d'égalité à cette manche est toujours r . L'événement conditionnant a pour probabilité $r^{k-1} > 0$, donc la probabilité conditionnelle est définie et vaut :

$$P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = r = \frac{p}{1+q}.$$

De même, conditionnellement à l'arrivée en manche n , la probabilité que A gagne cette manche est $q/(1+q)$. La formule des probabilités composées donne donc :

$$P(G_n) = r^{n-1} \frac{q}{1+q} = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

- c) Pour $n = 1$, l'expression vaut $r^0 q/(1+q) = q/(1+q)$, ce qui est bien $P(G_1)$ d'après la question 1.d.

- d) Les événements G_n sont deux à deux incompatibles, puisqu'une seule manche peut mettre fin au jeu. Leur réunion est G . On a $0 < r < 1$ car $p = 1 - q < 1 + q$, et donc :

$$P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = \frac{q}{1+q} \frac{1}{1-r}.$$

Or $1-r = (1+q-p)/(1+q) = 2q/(1+q) > 0$. La simplification donne $P(G) = 1/2$.

- e) L'échange des joueurs conserve le jeu ; ainsi $P(H) = P(G) = 1/2$. Les événements G et H sont incompatibles. La probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des deux est donc 1.

En dehors des événements de probabilité nulle où une manche durerait éternellement, le complémentaire de $G \cup H$ est E . Il en résulte $P(E) = 0$: le jeu a presque sûrement une fin. On peut aussi voir directement que $E \subset E_1 \cap \dots \cap E_m$, de probabilité r^m pour tout m , et laisser $m \rightarrow +\infty$.

Partie 2 : un autre jeu

3. a) Le système complet $([X_1 = i])_{i \geq 1}$ et l'indépendance donnent :

$$P(Y_1 = X_1 + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i-1}.$$

La série est géométrique, de raison $q^2 < 1$, donc :

$$P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{p^2 q}{1 - q^2} = \frac{pq}{1 + q}.$$

- b) Une victoire avec un lancer d'écart est l'union disjointe de $[Y_1 = X_1 + 1]$ et $[X_1 = Y_1 + 1]$. Par symétrie, ces deux événements ont la même probabilité. La probabilité demandée est donc $2pq/(1+q)$.

4. a) Pour $n \geq 1$, en convenant qu'une intersection sans terme est Ω , on a :

$$K_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \right) \cap ([Y_n = X_n + 1] \cup [X_n = Y_n + 1]).$$

Il faut les égalités préalables pour que le jeu atteigne cette manche, puis exactement un lancer d'écart à la manche gagnante.

b) Les manches sont indépendantes. La première intersection a pour probabilité r^{n-1} , et l'événement final a pour probabilité $2pq/(1+q)$, d'après la question 3.b appliquée à une manche quelconque. Ainsi :

$$P(K_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}, \quad n \geq 1.$$

5. L'événement K est l'union des K_n , deux à deux incompatibles. Comme $r \in]0, 1[$, la série géométrique converge et donne :

$$P(K) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) = \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{1-r} = \frac{2pq}{1+q} \frac{1+q}{2q} = p.$$

La probabilité que A gagne le pari est donc p ; celle que B gagne le pari est $1-p=q$, puisque le premier jeu se termine presque sûrement. Le premier jeu est équitable pour tous les $p \in]0, 1[$, alors que le pari l'est seulement pour $p = 1/2$.

Partie 3 : informatique

6. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

p = float(input('entrez une valeur pour p : '))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(p)
    c = c + 1
if X < Y:
    print('A gagne le premier jeu')
else:
    print('B gagne le premier jeu')
print(c)
```

La variable c est le numéro de la manche actuellement simulée. À chaque égalité, on tire indépendamment deux nouveaux rangs géométriques et on augmente c d'une unité. À la sortie, $X \neq Y$ et le joueur dont le rang est le plus petit est le vainqueur. La boucle se termine presque sûrement, comme le jeu réel. Le paramètre saisi doit appartenir à $]0, 1[$.

7. Code adapté en Python. Voici le script complet simulant les deux jeux :

Python

```
import numpy.random as rd

p = float(input('entrez une valeur pour p : '))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(p)
```

```
c = c + 1

if X < Y:

    print('A gagne le premier jeu')
else:

    print('B gagne le premier jeu')
print(c)

if abs(X - Y) == 1:

    print('A gagne le deuxième jeu')
else:

    print('B gagne le deuxième jeu')
```

On réutilise les rangs de la manche qui a réellement terminé le premier jeu. Leur différence absolue vaut 1 exactement lorsque le vainqueur l'a emporté avec un lancer d'écart. Il ne faut donc pas effectuer de nouveau tirage pour ce pari. Les scripts des questions 6 et 7 et le script matriciel corrigé de l'exercice 3 ont été exécutés ; les simulations illustrent les lois obtenues et ne remplacent pas leurs démonstrations.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule et 3.b : la nature ouverte du domaine est précisée ; la recherche de l'extremum est guidée par la hessienne et les signes de ses valeurs propres, sans déterminant.
- Exercice 2, 1.a : indication du calcul sur $[\varepsilon, R]$ et de la primitive pour traiter la borne 0 sans supposer un chapitre général sur les singularités aux bornes finies.
- Exercice 3, 3.b–3.c : Code adapté en Python, en conservant dans la question 3.b l'erreur d'affectations successives que le candidat doit repérer ; les conversions de saisie et les bornes de boucle sont explicitées.
- Problème, préambule : indépendance de tous les lancers explicitée, et préparation des manches éventuelles précisée pour donner un sens aux variables de toutes les manches ; les probabilités conditionnelles ne sont utilisées qu'avec un

conditionnement de probabilité strictement positive.

- Problème, 6–7 : Code adapté en Python ; syntaxe et support de `rd.geometric(p)` documentés, blancs de l'énoncé conservés.