



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note ${}^t B$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^t M = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^t A)M + MA.$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

2. b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On considère les trois matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
3. b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer en combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
4. b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
4. c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $-1, 0$.
5. b) En déduire les valeurs propres de f .
5. c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{Id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui, à tout réel x , associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

2. a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y , définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. b) En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité f_Y .

2. c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires mutuellement indépendantes et ayant toutes la même loi que Y .

On note S_n la variable aléatoire définie par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Pour un estimateur U_n de σ , on appelle biais le nombre $b_\sigma(U_n) = E(U_n) - \sigma$, lorsqu'il existe ; l'estimateur est sans biais si ce nombre est nul. On appelle risque quadratique le nombre $R_\sigma(U_n) = E((U_n - \sigma)^2)$, lorsqu'il existe. On dit que (U_n) est un estimateur convergent de σ si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|U_n - \sigma| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. a) Montrer que S_n est un estimateur de σ , en donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ , que l'on notera T_n , construit de façon affine à partir de S_n .

3. b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X , puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$.
3. c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ . En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ ; on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
4. On rappelle qu'après l'importation `import numpy as np`, la commande `np.random.normal(m, s, size=n)` renvoie un tableau de n réalisations indépendantes d'une loi normale d'espérance m et d'écart-type s . La commande `np.abs(X)` applique la valeur absolue à chaque élément du tableau X ; `np.mean(Y)` renvoie la moyenne de ses éléments; `np.sqrt` est la racine carrée et `np.pi` représente π . La fonction `input` lit une chaîne saisie par l'utilisateur, `int` la convertit en entier et `float` en réel.

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de $n \geq 1$ et de $\sigma > 0$ entrées par l'utilisateur.

Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
sigma = float(input('entrez la valeur de sigma : '))

X = ... # simulations de X1, ..., Xn
Y = ... # simulations de Y1, ..., Yn
S = ...
T = ...
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au

numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $1, \dots, n$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{[X=k]}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes Python suivantes permettant de simuler des variables usuelles discrètes, après `import numpy as np` :
 - `np.random.randint(a, b + 1)` simule une variable uniforme sur l'ensemble des entiers de a à b , bornes comprises ;
 - `np.random.binomial(n, p)` simule une variable de loi binomiale de paramètres n et p ;
 - `np.random.geometric(p)` simule une variable de loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$;
 - `np.random.poisson(a)` simule une variable de loi de Poisson de paramètre a .

Les appels à `input`, `int` et `float` ont le sens précisé dans l'exercice 2. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = ...
Y = ...
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $0, \dots, n$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

5. b) Écrire, pour tout i de $1, \dots, n$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

6. b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

6. c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$$

7. b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$

7. c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

7. d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

3. b) En déduire I_2 .

3. c) Compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul de I_n dans la variable `b` et son affichage pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$ entrée par l'utilisateur. Après `import numpy as np`, `np.log` désigne le logarithme népérien. `range(2, n + 1)` énumère les entiers de 2 à n ; la boucle est vide lorsque $n < 2$. `print` affiche la valeur qui lui est donnée.

Python

```
import numpy as np
```

```
n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
```

```

a = 1 / 2
b = np.log(2) - 1 / 2
for k in range(2, n + 1):
    aux = a
    a = ...
    b = ...
if n == 0:
    b = a
print(b)

```

4. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4. b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .

6. b) En déduire la valeur de J_1 .

7. En utilisant les questions 5 et 6, compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$ entrée par l'utilisateur.
 `range(1, n)` énumère les entiers de 1 à $n-1$; la boucle est vide si $n \leq 1$.

Python

```

import numpy as np

n = int(input('donnez une valeur pour n : '))

J = np.log(2)

if n == 0:

    I = 1 / 2

```

```
else:
    for k in range(1, n):
        J = ...
    I = ...
print(I)
```

8. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

9. a) Utiliser les questions 4 et 5 pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

9. b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

9. c) Utiliser la question 5 pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

10. a) Dédire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2^n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

11. a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$

11. b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

11. c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

12. a)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

12. b)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

12. c)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$