



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. La matrice nulle est antisymétrique. Si $M, N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de la transposition donne :

$${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha {}^t M + \beta {}^t N = -\alpha M - \beta N = -(\alpha M + \beta N).$$

Ainsi $\alpha M + \beta N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble est non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a) On utilise la transposée d'un produit, qui renverse l'ordre des facteurs, et ${}^t M = -M$:

$${}^t(f(M)) = {}^t(({}^t A)M) + {}^t(MA) = ({}^t M)A + ({}^t A)({}^t M) = -MA - ({}^t A)M = -f(M).$$

Donc $f(M)$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2. b) Pour $M, N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne :

$$f(\alpha M + \beta N) = ({}^t A)(\alpha M + \beta N) + (\alpha M + \beta N)A = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

L'application est linéaire et, d'après 2. a), prend ses valeurs dans son espace de départ. C'est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. a) Si $M = (m_{ij})$ est antisymétrique, ses coefficients diagonaux vérifient $m_{ii} = -m_{ii}$, donc sont nuls ; pour $i \neq j$, on a $m_{ji} = -m_{ij}$. Ainsi, dans le cas $n = 3$, il existe

$a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = aJ + bK + cL.$$

Les matrices J, K, L étant elles-mêmes antisymétriques, elles engendrent exactement $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

3. b) Si $aJ + bK + cL = 0$, la lecture des coefficients en positions $(1, 2)$, $(1, 3)$ et $(2, 3)$ donne respectivement $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. La famille est libre. Étant également génératrice, elle est une base et $\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = 3$.

4. a) La transposée utilisée est ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On détaille les deux produits de

chaque somme :

$$({}^tA)J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad JA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leur somme est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $f(J) = -J - L$.

$$({}^tA)K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leur somme est nulle, donc $f(K) = 0$.

$$({}^tA)L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leur somme est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $f(L) = -L$.

4. b) L'image d'une application linéaire est engendrée par les images des vecteurs d'une base. Ainsi :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(-J - L, 0, -L) = \text{Vect}(J, L).$$

La dernière égalité résulte de $L = -f(L)$ et $J = -f(J) + f(L)$. La famille (J, L) , extraite de la base $\mathcal{B}$, est libre. C'est donc une base de l'image et $\text{rg}(f) = 2$.

4. c) Le théorème du rang, appliqué à cet endomorphisme d'un espace de dimension 3,

donne $\dim \text{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$. Or $K \neq 0$ et $f(K) = 0$, donc (K) est une base du noyau.

On peut aussi vérifier directement que $f(aJ + bK + cL) = -aJ - (a + c)L = 0$ impose $a = c = 0$, tandis que b est libre.

5. a) Les colonnes de la matrice sont les coordonnées de $f(J)$, $f(K)$, $f(L)$ dans $\mathcal{B}$:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients appartiennent bien à $\{-1, 0\}$.

5. b) La matrice est triangulaire, ce qui fait apparaître les seules valeurs propres possibles -1 et 0 . On peut le justifier sans aucun déterminant : si ${}^t(F(x, y, z)) = \lambda(x, y, z)^t$ et $\lambda \notin \{0, -1\}$, les deux premières équations imposent $x = y = 0$, puis la troisième impose $z = 0$, ce qui exclut un vecteur propre.

Ces deux valeurs sont effectivement atteintes : $f(K) = 0$ avec $K \neq 0$, et $f(L) = -L$ avec $L \neq 0$. Les valeurs propres de f sont exactement 0 et -1 .

5. c) La matrice de $f + \text{Id}$ est :

$$F + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses première et deuxième colonnes sont indépendantes et sa troisième est nulle ; son rang est donc 2. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) = 1$. Plus précisément, le système impose $x = y = 0$, donc $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}(L)$.

L'espace propre associé à 0 est $\text{Vect}(K)$ et celui associé à -1 est $\text{Vect}(L)$. Tous les vecteurs propres sont donc contenus dans le sous-espace $\text{Vect}(K, L)$, de dimension 2. Ils ne peuvent former une base de l'espace de dimension 3 : f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

1. La densité f_X est paire. Pour un réel x fixé et $R > |x|$, le changement de variable affine $u = -t$ sur le segment $[-R, -x]$ donne :

$$\int_{-R}^{-x} f_X(t) dt = \int_x^R f_X(u) du.$$

Les intégrales généralisées convergent car f_X est une densité. En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient :

$$F_X(-x) = \int_x^{+\infty} f_X(u) du = 1 - \int_{-\infty}^x f_X(u) du = 1 - F_X(x).$$

La relation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$; en particulier $F_X(0) = 1/2$.

2. a) Si $x < 0$, l'événement $[|X| \leq x]$ est impossible, donc $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 0$, cet événement est $[-x \leq X \leq x]$. Puisque X est à densité, $P(X = -x) = 0$, et :

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = 2F_X(x) - 1.$$

On retrouve les deux expressions demandées, qui donnent toutes deux 0 en $x = 0$.

2. b) La fonction F_Y est continue sur les deux demi-droites et au point 0, car $2F_X(0) - 1 = 0$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec une dérivée positive. Ainsi Y est à densité. On peut choisir :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La valeur choisie au point 0 est sans incidence sur la loi. Cette densité a des limites finies de chaque côté de 0.

2. c) La variable Y est positive ; il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale de $xf_Y(x)$ sur $[0, +\infty[$. Pour $R > 0$, on reconnaît la dérivée de l'exponentielle :

$$\int_0^R xf_Y(x) dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right]_0^R = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-R^2/(2\sigma^2)}).$$

La limite est finie puisque $\sigma > 0$. L'intégrale est absolument convergente, son intégrande étant positif, et :

$$E(Y) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

3. a) Question adaptée au programme actuel : les notions de biais et d'estimateur sans biais sont définies dans l'énoncé.

L'expression

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$$

dépend seulement de l'échantillon et de n , sans faire intervenir le paramètre inconnu σ . Utilisée pour estimer σ , elle est donc un estimateur ; sa réalisation numérique après observation est une estimation.

Les Y_k ayant une espérance finie, la linéarité donne $E(S_n) = \sigma\sqrt{2/\pi}$. Le biais est donc :

$$b_\sigma(S_n) = \sigma \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1 \right).$$

Pour trouver un estimateur affine $aS_n + b$ sans biais pour toute valeur $\sigma > 0$, avec a, b indépendants de σ , il faut $a\sigma\sqrt{2/\pi} + b = \sigma$ pour tout $\sigma > 0$. L'identification impose $a = \sqrt{\pi/2}$ et $b = 0$. On choisit donc :

$$T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_n, \quad E(T_n) = \sigma.$$

3. b) Comme $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, son espérance est 0 et sa variance est σ^2 . Il admet un moment d'ordre 2 et la formule de Koenig-Huygens donne $E(X^2) = \sigma^2$. L'égalité $Y^2 = X^2$ entraîne $E(Y^2) = \sigma^2$; en particulier Y admet une variance.

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Les Y_k sont mutuellement indépendantes et de même variance. La variance de leur somme est donc la somme des variances, d'où :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Y_k) = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

3. c) Question adaptée au programme actuel : le risque quadratique et la convergence demandée sont définis dans le sujet; on établit ici le résultat particulier par une majoration de probabilités.

La variable T_n a un moment d'ordre 2 puisque S_n en a un. Elle est sans biais, donc :

$$R_\sigma(T_n) = E((T_n - \sigma)^2) = V(T_n) = \frac{\pi}{2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, applicable car T_n a une variance et $E(T_n) = \sigma$, fournit :

$$0 \leq P(|T_n - \sigma| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \rightarrow 0.$$

C'est exactement la propriété de convergence définie dans l'énoncé. Ainsi T_n est un estimateur convergent de σ .

4. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
```

```
sigma = float(input('entrez la valeur de sigma : '))
X = np.random.normal(0, sigma, size=n)
Y = np.abs(X)
S = np.mean(Y)
T = np.sqrt(np.pi / 2) * S
```

On suppose les données saisies conformes à $n \geq 1$ et $\sigma > 0$. Le tableau X simule n normales indépendantes ; Y contient leurs valeurs absolues. Des fonctions séparées de variables indépendantes restent indépendantes, donc ce tableau simule l'échantillon demandé. S et T sont les réalisations des deux estimateurs. Le deuxième argument de `normal` est bien l'écart-type σ , et non sa variance. Ce code a été exécuté avec des entrées admissibles ; une simulation ne constitue pas une preuve des propriétés établies en 3.

Exercice 3

1. Lorsque $n = 1$, on a $X = 1$ avec probabilité 1 et on effectue un seul tirage dans V . La variable Y vaut 1 si la boule est blanche, avec probabilité p , et 0 sinon. Ainsi Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
2. Chaque boule de U a la même probabilité d'être tirée. Donc X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Les formules restent valables pour $n = 1$, où X est certaine et sa variance est nulle.

3. Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $P(X = k) = 1/n > 0$, ce qui autorise le conditionnement. Sachant $X = k$, on compte les succès de k tirages indépendants avec remise, chaque succès ayant la même probabilité p . La loi conditionnelle de Y est donc $\mathcal{B}(k, p)$.

$$P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{si } k < i. \end{cases}$$

Pour les entiers $i < 0$, cette probabilité est également nulle.

4. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = np.random.randint(1, n + 1)
Y = np.random.binomial(X, p)
```

Les données satisfont $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. La borne supérieure de `randint` est exclue : $n + 1$ permet donc d'obtenir les valeurs $1, \dots, n$. Une fois X réalisé, le second appel utilise le nombre correspondant de tirages et simule la loi conditionnelle démontrée en 3. Le code a été exécuté avec des entrées admissibles.

5. a) On compte au plus $X \leq n$ boules blanches, donc Y prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Réciproquement, pour chaque i dans cet ensemble, l'événement $[X = n] \cap [Y = i]$ a pour probabilité $\frac{1}{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} > 0$, car $p, q > 0$. Toutes les valeurs annoncées sont donc possibles.

Les événements $[X = k]$, pour $1 \leq k \leq n$, forment un système complet. La formule des probabilités totales et la loi conditionnelle donnent :

$$P(Y = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

La somme est géométrique et $1 - q = p > 0$, ce qui justifie la division.

5. b) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, les termes correspondant à $k < i$ sont nuls. La même formule donne :

$$P(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

L'indice k prend bien $n - i + 1$ valeurs. Conformément à la demande, on conserve cette somme sans simplification.

6. a) Les conditions $1 \leq i \leq k$ rendent toutes les factorielles suivantes définies :

$$i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

6. b) La variable Y est à support fini, donc elle possède une espérance. En utilisant sa loi, puis en réordonnant une somme finie sur les couples $1 \leq i \leq k \leq n$, on obtient :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n iP(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

L'identité de 6. a) permet d'écrire :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

Aucun échange de sommes infinies ni formule d'espérance conditionnelle n'est nécessaire.

6. c) Pour chaque $k \geq 1$, posons $j = i - 1$ dans la somme intérieure. Le binôme de

Newton et $p + q = 1$ donnent :

$$\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} = p(p+q)^{k-1} = p.$$

Il reste donc :

$$E(Y) = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)p}{2}.$$

7. a) Puisque Y est bornée, $Y(Y-1)$ a une espérance. Les termes correspondant à $i = 0$ et $i = 1$ s'annulent. Pour $2 \leq i \leq k$, le calcul factoriel analogue à 6. a) donne :

$$i(i-1) \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-2)!(k-i)!} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}.$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, le transfert et le réordonnement de sommes finies donnent :

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$$

7. b) Pour $k \geq 2$, le changement d'indice $j = i - 2$ puis le binôme de Newton donnent :

$$\sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} = p^2(p+q)^{k-2} = p^2.$$

Les formules usuelles des sommes d'entiers et de carrés fournissent :

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

En reportant dans 7. a), on obtient $E(Y(Y-1)) = \frac{p^2 n(n+1)(n-1)}{n \cdot 3} = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$.

7. c) Si $n = 1$, la question 1 donne $Y \in \{0, 1\}$, donc $Y(Y-1) = 0$ et son espérance est nulle. La formule précédente donne également $\frac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$; elle reste valable.

7. d) La variable Y possède un moment d'ordre 2 puisqu'elle est bornée. L'identité $Y^2 = Y(Y-1) + Y$ et la formule de Koenig-Huygens donnent, sans calcul supplémentaire :

$$V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - (E(Y))^2.$$

Problème

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0, 1]$, y compris pour $n = 0$ grâce à la convention de l'énoncé. Les dénominateurs $1+x$ et $(1+x)^2$ ne s'annulent pas sur ce segment. Les deux intégrandes sont donc continues sur $[0, 1]$, ce qui assure l'existence de I_n et J_n comme intégrales sur un segment.

2. Une primitive de $(1+x)^{-2}$ est $-(1+x)^{-1}$, d'où :

$$I_0 = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Pour I_1 , on écrit $x = (1+x) - 1$, donc $\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$. Ainsi :

$$I_1 = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

3. a) La linéarité de l'intégrale sur un segment permet de réunir les trois termes :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

3. b) Pour $n = 0$, la relation précédente donne $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$. On en déduit :

$$I_2 = 1 - 2 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

3. c) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le cas $n = 0$ est pris en charge explicitement ; sans ce cas, le script initial afficherait la valeur initialisée de I_1 au lieu de I_0 .

Python

```
import numpy as np

n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
a = 1 / 2
b = np.log(2) - 1 / 2
for k in range(2, n + 1):
    aux = a
    a = b
    b = 1 / (k - 1) - 2 * a - aux
if n == 0:
    b = a
print(b)
```

Pour $n \geq 2$, avant l'itération d'indice k , on a a égal à I_{k-2} et b égal à I_{k-1} . a sauvegarde I_{k-2} , puis a reçoit I_{k-1} et la relation de 3. a), appliquée à l'indice $k - 2$, donne b égal à I_k . À la sortie, b contient donc I_n . Pour $n = 1$, la boucle est vide et l'initialisation de b convient ; pour $n = 0$, la correction finale donne $I_0 = 1/2$.

Le script a été exécuté pour plusieurs petites valeurs de n , dont 0 et 1. Les calculs sont effectués en précision flottante ; la récurrence avec soustractions peut amplifier les erreurs d'arrondi quand n devient grand et ne remplace pas l'expression exacte des intégrales.

4. a) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^n \geq 0$ et $(1 + x)^2 \geq 1$, donc :

$$0 \leq \frac{x^n}{(1 + x)^2} \leq x^n.$$

La positivité de l'intégrale et l'intégration de cet encadrement donnent

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

4. b) Les deux bornes 0 et $1/(n+1)$ tendent vers 0. Par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. Pour $n \geq 1$, on effectue une intégration par parties sur $[0, 1]$ avec $u(x) = x^n$ et $v(x) = -1/(1+x)$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur ce segment et $v'(x) = 1/(1+x)^2$. Par conséquent :

$$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}.$$

Le terme en 0 est nul car $n \geq 1$. C'est pourquoi cette formule n'est pas utilisée à l'indice $n = 0$.

6. a) On calcule d'abord $J_0 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la linéarité donne :

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

6. b) Pour $n = 0$, on a $J_0 + J_1 = 1$. Ainsi $J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln 2$.

7. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la branche $n = 0$ évite d'appliquer la relation de 5 hors de son domaine de validité.

Python

```
import numpy as np

n = int(input('donnez une valeur pour n : '))

J = np.log(2)

if n == 0:
    I = 1 / 2
else:
    for k in range(1, n):
```

```
J = 1 / k - J
I = n * J - 1 / 2
print(I)
```

Lorsque $n \geq 1$, avant l'itération d'indice k , la variable J représente J_{k-1} . La relation de 6.

a) donne $J_k = 1/k - J_{k-1}$, donc l'affectation calcule le terme suivant. Après les indices $1, \dots, n-1$, J représente J_{n-1} et la dernière ligne de calcul applique $I_n = nJ_{n-1} - 1/2$. Pour $n = 1$, la boucle est vide : on obtient $I_1 = \ln 2 - 1/2$. La branche séparée renvoie I_0 si $n = 0$.

Le code a été exécuté pour plusieurs valeurs, dont 0 et 1, et les sorties ont été comparées aux intégrales calculées numériquement. Les égalités démontrées en 5 et 6 justifient mathématiquement l'algorithme ; les sorties numériques restent approchées.

8. Méthode 1 — Récurrence à partir de la relation entre deux intégrales

Posons

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Pour $n = 1$, $(-1)(\ln 2 - H_1) = 1 - \ln 2 = J_1$. Supposons maintenant $J_n = (-1)^n(\ln 2 - H_n)$ pour un entier $n \geq 1$. La question 6 donne :

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1}(\ln 2 - H_n).$$

Or $H_{n+1} = H_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$, donc :

$$(-1)^{n+1}(\ln 2 - H_{n+1}) = (-1)^{n+1}(\ln 2 - H_n) + \frac{1}{n+1} = J_{n+1}.$$

La propriété est héréditaire et vraie à l'indice 1 ; elle vaut pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Identité géométrique finie avant intégration

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$, la somme géométrique finie donne :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^j + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

On intègre cette égalité sur $[0, 1]$. La somme étant finie, la linéarité s'applique sans difficulté :

$$\ln 2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} + (-1)^n J_n = H_n + (-1)^n J_n.$$

En isolant J_n et en utilisant $((-1)^n)^2 = 1$, on retrouve $J_n = (-1)^n (\ln 2 - H_n)$.

La première approche exploite directement la récurrence déjà obtenue ; la seconde fait apparaître un reste intégral exact à partir d'une identité algébrique finie. Aucune série entière n'est utilisée.

9. a) En appliquant 5 à l'indice $n+1$, on obtient :

$$J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}.$$

D'après 4, I_{n+1} tend vers 0. Le numérateur tend donc vers $1/2$ et le dénominateur vers $+\infty$. Ainsi $J_n \rightarrow 0$.

9. b) La question 8 donne $H_n = \ln 2 - (-1)^n J_n$. Comme $|(-1)^n J_n| = J_n \rightarrow 0$, les sommes partielles H_n convergent vers $\ln 2$. Par la définition de la convergence d'une série, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Cette preuve repose sur les sommes partielles et le reste intégral établi, sans invoquer un critère général pour les séries alternées.

9. c) La même identité que dans 9. a) donne :

$$nJ_n = \frac{n}{n+1} \left(I_{n+1} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par définition de l'équivalence, $J_n \sim \frac{1}{2n}$. Le coefficient demandé est donc $\alpha = 2 > 0$.

10. a) La question 8 identifie exactement $u_n = (-1)^n J_n$. Le quotient :

$$\frac{u_n}{(-1)^n/(2n)} = 2nJ_n$$

tend vers 1 d'après 9. c). Ainsi $u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$. Cette justification par quotient reste valable bien que les deux suites changent de signe.

10. b) La série considérée est obtenue en multipliant celle de 9. b) par $-1/2$. Elle est donc convergente et sa somme vaut $-\frac{1}{2} \ln 2$.

L'équivalence de 10. a) ne permet pas, à elle seule, de conclure pour la série de terme général u_n : les termes changent de signe et l'équivalence ne contrôle pas les sommes partielles des différences. Il faut étudier ces sommes, ce qui est l'objet de la question 11.

11. a) Par la définition de u_k , pour tout $k \geq 1$:

$$u_{k+1} = u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

En multipliant par $k+1$, puis en retranchant ku_k et en ajoutant $(-1)^k$, on obtient :

$$(k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k = (k+1)u_k - ku_k = u_k.$$

11. b) On somme l'identité précédente pour $k = 1, \dots, n$. La somme des différences est

télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k = (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k.$$

La somme géométrique finie vérifie

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = -\frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

Par conséquent :

$$S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

11. c) On sait que $u_1 = \ln 2 - 1$ et que $u_m = (-1)^m J_m$, avec $mJ_m \rightarrow 1/2$.

Pour les indices pairs, la formule de 11. b) donne :

$$S_{2n} = -(2n+1)J_{2n+1} - u_1 \rightarrow -\frac{1}{2} - (\ln 2 - 1) = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Pour les indices impairs, elle donne :

$$S_{2n+1} = (2n+2)J_{2n+2} - u_1 - 1 \rightarrow \frac{1}{2} - (\ln 2 - 1) - 1 = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Les deux sous-suites convergent vers la même limite. Le résultat rappelé dans l'énoncé permet donc de conclure que $S_n \rightarrow \frac{1}{2} - \ln 2$. Par définition des sommes partielles, la série de terme général u_n est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

12. a) Le terme intérieur de a) est une somme partielle

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} / j,$$

qui tend vers $\ln 2 \neq 0$ d'après 9. b). La série extérieure de a) ne peut donc converger, puisque son terme général ne tend pas vers zéro. Ce n'est pas le résultat démontré.

12. b) La série intérieure de b), convergente d'après 9. b), vaut $\ln 2$ et ne dépend pas de k . La série extérieure a donc pour terme général le nombre constant $\ln 2 > 0$; sa somme partielle d'ordre n vaut $n \ln 2$ et tend vers $+\infty$. Ce n'est pas le résultat démontré.

12. c) Pour tout $k \geq 1$, la convergence démontrée en 9. b) permet de soustraire les k premiers termes :

$$u_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

La question 11 a donc démontré le résultat c) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Les parenthèses précisent que chaque série intérieure est d'abord sommée. On n'intervertit pas deux sommes infinies.

Relevé des adaptations

Exercice 2, question 3. a) : définition locale du biais et de la propriété « sans biais », pour conserver la demande d'estimation ancienne sans supposer ce chapitre théorique connu.

Exercice 2, question 3. c) : définitions locales du risque quadratique et de la convergence de l'estimateur ; indication de Bienaymé-Tchebychev et preuve de la majoration particulière de probabilités.

Exercice 2, question 4 ; exercice 3, question 4 ; problème, questions 3. c) et 7 : Code adapté en Python. Les blancs à compléter sont conservés dans le sujet et les commandes utilisées y sont documentées. Les quatre blocs complétés ont été exécutés.

Problème, question 3. c) : ajout du traitement de $n = 0$, pour que l'affichage donne I_0 plutôt que l'initialisation de I_1 .

Problème, question 7 : ajout du traitement de $n = 0$, pour conserver la définition de I_n sur $\mathbb{N}$ sans appliquer à 0 une relation réservée à $\mathbb{N}^*$.
