



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2019

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) a) Posons $N = A - I$. On obtient

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont $v, -v, -v$, où $v = {}^t(-1, -2, 1)$. Or

$Nv = -C_1(N) - 2C_2(N) + C_3(N) = 0$. Les colonnes de N^2 sont donc $Nv, -Nv, -Nv$, toutes nulles. Ainsi $(A - I)^2 = N^2 = 0$.

1) b) En développant l'égalité précédente, $A^2 - 2A + I = 0$, d'où $A(2I - A) = I$. Une matrice carrée possédant un inverse à droite est inversible. Par conséquent $A^{-1} = 2I - A$. Le produit dans l'autre ordre vaut également I puisque A et $2I - A$ commutent.

2) a) Méthode 1 — Binôme de matrices qui commutent

La matrice I commute avec N . Pour $n \geq 2$, le binôme donne

$$(I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = I + nN,$$

car $N^k = 0$ dès que $k \geq 2$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, la même formule se vérifie directement. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = I + nN = (1 - n)I + nA.$$

Méthode 2 — Récurrence à partir d'une relation quadratique

L'égalité est vraie pour $n = 0$. Si $A^n = (1 - n)I + nA$, alors, puisque $A^2 = 2A - I$,

$$A^{n+1} = (1 - n)A + nA^2 = (1 - n)A + 2nA - nI = -nI + (n + 1)A.$$

C'est la formule au rang $n + 1$. La récurrence donne donc la même expression. Le binôme met en valeur $N^2 = 0$; la récurrence permet de travailler directement avec la relation vérifiée par A .

2) b) Pour $n = -1$, l'expression $(1 - n)I + nA$ vaut $2I - A$. C'est précisément A^{-1} d'après 1) b). La formule reste donc valable à cet indice. Le binôme utilisé en 2) a) n'est pas invoqué avec un exposant négatif.

3) a) Si $AX = \lambda X$ pour une colonne $X \neq 0$, alors $(A - I)^2 X = (\lambda - 1)^2 X$. Comme $(A - I)^2 = 0$, on a $(\lambda - 1)^2 = 0$, donc $\lambda = 1$.

Il reste à vérifier que cette valeur est effectivement propre. La colonne $v = {}^t(-1, -2, 1)$ est non nulle et vérifie $Nv = 0$, donc $Av = v$. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

3) b) Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale. Ses coefficients diagonaux seraient tous égaux à la seule valeur propre 1 : on aurait $Q^{-1}AQ = I$, puis $A = QIQ^{-1} = I$. Or, par exemple, $A_{1,1} = 0$. Cette contradiction montre que A n'est pas diagonalisable.

4) a) Les colonnes de N sont $v, -v, -v$, où $v \neq 0$. Son image est donc $\text{Vect}(v)$ et son rang vaut 1. Le rang de $f - Id$, représenté par N , est lui aussi égal à 1.

4) b) Dans la base canonique, $u_1 = (-1, -2, 1)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$. On a $(f - Id)(u_1) = 0$ par $N^2 = 0$, et $(f - Id)(u_2) = 0$ puisque $C_1(N) + C_3(N) = 0$.

Si $au_1 + bu_2 = 0$, la deuxième coordonnée donne $-2a = 0$, puis la première donne $b = 0$. La famille est libre. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f - Id) = 3 - 1 = 2$. Cette famille libre de deux vecteurs du noyau en est donc une base.

5) a) Supposons $au_1 + bu_2 + ce_1 = 0$. Les coordonnées donnent

$$-a + b + c = 0, \quad -2a = 0, \quad a + b = 0.$$

La deuxième égalité impose $a = 0$, la troisième $b = 0$ et la première $c = 0$. La famille est

libre et comporte trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 5) b) Les vecteurs u_1, u_2 appartiennent au noyau de $f - Id$, donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Par définition de u_1 , on a aussi $f(e_1) = u_1 + e_1$. Les colonnes de la matrice cherchée sont les coordonnées de ces trois images dans (u_1, u_2, e_1) , d'où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 6) Les colonnes de P sont les coordonnées de u_1, u_2, e_1 dans la base canonique. Puisque ces vecteurs forment une base, P est inversible : c'est la matrice de passage de la base canonique à (u_1, u_2, e_1) . La formule de changement de base donne $T = P^{-1}AP$, ou encore $A = PTP^{-1}$ et $AP = PT$.

- 7) a) Écrivons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$. Puisque $T = I + E_{1,3}$, l'égalité $MT = TM$ équivaut à

$ME_{1,3} = E_{1,3}M$. Ces deux produits sont

$$ME_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \quad E_{1,3}M = \begin{pmatrix} g & h & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité équivaut à $g = h = d = 0$ et $j = a$. Par conséquent

$$M \in E \iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3}.$$

C'est exactement l'espace engendré annoncé, donc un sous-espace vectoriel. Si cette combinaison est nulle, les coefficients aux positions $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ imposent successivement $a = b = c = e = f = 0$. Les cinq générateurs sont libres : ils forment une base et $\dim E = 5$.

7) b) Ici N désigne la matrice quelconque de la question, sans lien imposé avec la matrice $A - I$ employée plus haut. En remplaçant A par PTP^{-1} puis en multipliant l'égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P , on obtient

$$NA = AN \iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).$$

Toutes ces opérations sont réversibles puisque P est inversible ; il s'agit donc bien d'une équivalence.

7) c) La question précédente donne $N \in F \iff P^{-1}NP \in E$. D'après 7) a), cette dernière matrice est une combinaison des cinq matrices de la base de E . En multipliant cette combinaison à gauche par P et à droite par P^{-1} , on écrit N comme combinaison de

$$P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, \quad PE_{1,2}P^{-1}, \quad PE_{1,3}P^{-1}, \quad PE_{2,2}P^{-1}, \quad PE_{2,3}P^{-1}.$$

Réciproquement, une combinaison de ces matrices, une fois conjuguée par P^{-1} à gauche et P à droite, appartient à E , donc commute avec A par 7) b). L'ensemble F est exactement l'espace engendré annoncé ; c'est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 2

- 1) La boule noire peut être tirée à n'importe quel rang de 1 à n et est nécessairement apparue après n tirages. Tous ces rangs sont possibles : $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.
- 2) a) Sachant que les $i - 1$ premiers tirages sont blancs, l'urne contient encore $n - i + 1$ boules, dont la boule noire et $n - i$ boules blanches. Chaque boule restante ayant la même probabilité d'être tirée, la probabilité conditionnelle cherchée vaut $(n - i)/(n - i + 1)$. Le conditionnement est licite : tirer $i - 1 \leq n - 2$ boules blanches a une probabilité strictement positive.

2) b) Méthode 1 — Probabilités composées

Pour $2 \leq k \leq n$, l'événement $[X = k]$ correspond à $k - 1$ tirages blancs puis à la boule noire. Les conditionnements portent sur des suites possibles. La formule des probabilités composées donne

$$P(X = k) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j}{n-j+1} \right) \frac{1}{n-k+1} = \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Cette expression vaut encore pour $k = 1$, car la probabilité de tirer immédiatement la boule noire est $1/n$. Pour $k = n$, le dernier facteur est 1 : après les $n - 1$ boules blanches, la dernière boule est noire. Ainsi $P(X = k) = 1/n$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Méthode 2 — Position de la boule noire dans un ordre aléatoire

Distinguons provisoirement toutes les boules, y compris celles numérotées 0, et imaginons que l'on poursuive les tirages jusqu'à vider l'urne. Chaque ordre des n boules a pour probabilité $1/n \times 1/(n-1) \times \dots \times 1 = 1/n!$. Pour un rang k fixé à la boule noire, les autres boules peuvent être disposées dans $(n-1)!$ ordres, en les plaçant successivement sur les places restantes. Il en résulte $P(X = k) = (n-1)!/n! = 1/n$.

La première méthode suit l'expérience arrêtée au tirage noir ; la seconde explique l'uniformité par la symétrie des positions, sans supposer une règle de dénombrement non justifiée.

- 2) c) La variable X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Comme son support est fini, tous ses moments existent, et les formules de cette loi donnent

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- 3) a) Pour $1 \leq k \leq n-1$, l'événement $[X = k] \cap [Y = 0]$ impose de tirer $k-1$ boules blanches numérotées 0, puis la boule noire. Lors du j -ième de ces tirages blancs, $n-j-1$ boules numérotées 0 restent parmi $n-j+1$ boules. La formule des probabilités composées donne

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j-1}{n-j+1} \right) \frac{1}{n-k+1}.$$

Le produit, vide pour $k = 1$, vaut

$$\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}.$$

Après multiplication par $1/(n-k+1)$, on obtient $(n-k)/(n(n-1))$. Si $k = n$, toutes les boules blanches ont été tirées avant la noire, donc $Y = 1$: la probabilité étudiée est nulle, conformément à la formule avec $n-k = 0$.

- 3) b) Les événements $[X = k]$ forment un système complet fini. On peut donc sommer les probabilités de la question précédente :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n(n-1)} = \frac{0+1+\dots+(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

On a utilisé $0+1+\dots+(n-1) = n(n-1)/2$.

3) c) La variable Y prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1/2$.

Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ses moments existent et

$$E(Y) = \frac{1}{2}, \quad V(Y) = \frac{1}{4}.$$

4) a) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
nB = n - 1
X = 1
u = rd.randint(1, nB + 2)
while u < nB + 1:
    nB = nB - 1
    u = rd.randint(1, nB + 2)
    X = X + 1
print("La boule noire est apparue au tirage numéro", X)
```

À chaque tirage, u est uniforme sur les entiers de 1 à $nB + 1$, puisque la borne supérieure de `randint` est exclue. La valeur $nB + 1$ représente la boule noire. Si une blanche est tirée, son retrait diminue nB de un ; on prépare le tirage suivant et on augmente son rang X . Dès que nB vaut zéro, l'unique valeur tirée est 1, qui code la noire : la boucle s'arrête au plus au rang n .

Le script a été exécuté avec plusieurs valeurs de n et des suites de tirages contrôlées, notamment les sorties $X = 1$ et $X = n$. Ces essais vérifient le comportement du programme ; la loi exacte résulte de 2) b).

4) b) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd
```

```

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
nB = n - 1
X = 1
Y = 0 # (4)
u = rd.randint(1, nB + 2)
while u < nB + 1:
    nB = nB - 1
    if u == 1:
        Y = 1 # (8)
    u = rd.randint(1, nB + 2)
    X = X + 1
print("La boule noire est apparue au tirage numéro", X)
print("La valeur de Y est", Y)

```

Tant que la boule blanche numérotée 1 n'a pas été tirée, on lui réserve le code 1 ; les autres codes blancs sont attribués aux boules numérotées 0. Le test `u == 1` indique donc sa première apparition et fixe `Y` à 1. Une fois cette boule retirée, `Y` reste définitivement égal à 1 ; réutiliser le code 1 pour une autre blanche ne change plus cette valeur. Si la noire arrive avant elle, l'initialisation `Y = 0` demeure.

Le script a été exécuté, y compris avec une noire immédiate, une boule numérotée 1 immédiate puis une noire, et une noire au dernier rang. Les deux variables affichées respectent le modèle. Aucun test numérique ne remplace la démonstration des lois.

Exercice 3

1) Les intégrandes sont polynomiaux sur $[0, 1]$, donc continus. On calcule

$$u_1 = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$u_2 = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

2) a) Pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$. Donc $(1 - t^2)^{n+1} \leq (1 - t^2)^n$. En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est décroissante. Elle est même strictement décroissante puisque l'inégalité est stricte pour $t \in]0, 1[$.

2) b) Chaque intégrande est positif ou nul, donc $u_n \geq 0$. La suite est décroissante et minorée par zéro; le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers un réel positif ou nul.

3) a) Question adaptée au programme actuel : le domaine $\sigma > 0$ est explicité.

Pour $\sigma > 0$, l'intégrande est une densité de la loi normale centrée de variance σ^2 . Son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut donc 1.

3) b) Question adaptée au programme actuel : le domaine $n \geq 1$ est explicité pour cette intégrale.

Pour $n \geq 1$, choisissons $\sigma = 1/\sqrt{2n}$, qui est strictement positif. On a $1/(2\sigma^2) = n$ et $\sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/n}$. La normalisation précédente donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

La fonction intégrée est paire et positive; les deux demi-intégrales convergent et sont égales. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

En particulier, en prenant $n = 1$, $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}/2$.

3) c) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est strictement positive. Elle est au-dessus de sa tangente en zéro : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . En prenant $x = -t^2$, il vient $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) d) Question adaptée au programme actuel : le domaine $n \geq 1$ est explicité pour le majorant.

Sur $[0, 1]$, les deux membres de l'inégalité précédente sont positifs ou nuls. Pour $n \geq 1$, l'élévation à la puissance n préserve donc l'ordre : $(1 - t^2)^n \leq e^{-nt^2}$. On en déduit

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Le majorant tend vers zéro. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. L'indice $n = 0$, pour lequel ce majorant n'est pas défini, n'intervient pas dans cette limite.

4) Question adaptée au programme actuel : une indication sur les sommes partielles accompagne la conclusion sur la série.

Pour $n \geq 0$,

$$\int_0^1 (1 - t)^n dt = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}.$$

Sur $[0, 1]$, on a $t^2 \leq t$, donc $1 - t^2 \geq 1 - t \geq 0$. L'élévation à la puissance n puis l'intégration donnent $u_n \geq 1/(n + 1)$.

Pour ne pas invoquer de critère général sur les séries, considérons directement leurs sommes partielles. Pour tout entier $j \geq 1$ et $t \in [j, j + 1]$, on a $1/t \leq 1/j$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^m u_k \geq \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=1}^{m+1} \int_j^{j+1} \frac{dt}{t} = \ln(m + 2).$$

Le dernier terme tend vers $+\infty$. Les sommes partielles de la série de terme général u_n tendent donc vers $+\infty$: cette série diverge, bien que u_n tende vers zéro.

5) a) Effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ avec $t \mapsto (1 - t^2)^{n+1}$ et la primitive t de la fonction constante 1. Les fonctions sont de classe C^1 sur ce segment et

$$\frac{d}{dt}(1 - t^2)^{n+1} = -2(n + 1)t(1 - t^2)^n.$$

Le terme aux bornes $[t(1 - t^2)^{n+1}]_0^1$ est nul. Il vient

$$u_{n+1} = 2(n + 1) \int_0^1 t^2(1 - t^2)^n dt.$$

Or $t^2(1-t^2)^n = (1-t^2)^n - (1-t^2)^{n+1}$. Par linéarité de l'intégrale,
 $u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$.

5) b) La relation précédente équivaut à $(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$. Les dénominateurs étant non nuls, on peut itérer à partir de $u_0 = 1$: pour $n \geq 1$,

$$u_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2j+2}{2j+3} = \frac{2^n n!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

En séparant les facteurs pairs et impairs de $(2n+1)!$, on a

$$(2n+1)! = (2 \cdot 4 \cdots 2n)(1 \cdot 3 \cdots (2n+1)) = 2^n n! (3 \cdot 5 \cdots (2n+1)).$$

Par conséquent $u_n = 4^n (n!)^2 / (2n+1)!$. Pour $n = 0$, le membre de droite vaut aussi 1 avec $0! = 1$. La formule est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) c) Question adaptée au programme actuel : l'équivalent est démontré par un encadrement gaussien guidé.

Posons $K = \sqrt{\pi}/2$. La question 3) d) donne $\sqrt{n} u_n \leq K$ pour $n \geq 1$. Il faut obtenir une minoration aussi proche de K que souhaité.

Fixons $\delta \in]0, 1[$. Si $0 \leq t \leq \delta$, alors, pour $0 \leq v \leq t^2$, $1/(1-v) \leq 1/(1-\delta^2)$. En intégrant puis en changeant de signe,

$$\ln(1-t^2) = - \int_0^{t^2} \frac{dv}{1-v} \geq - \frac{t^2}{1-\delta^2}.$$

Par croissance de l'exponentielle et positivité de l'intégrande définissant u_n ,

$$u_n \geq \int_0^\delta (1-t^2)^n dt \geq \int_0^\delta e^{-nt^2/(1-\delta^2)} dt.$$

Pour $n \geq 1$, le changement de variable affine indiqué $s = t\sqrt{n/(1-\delta^2)}$, strictement croissant et de classe C^1 , est effectué sur ce segment. Il donne

$$\sqrt{n} u_n \geq \sqrt{1 - \delta^2} \int_0^{\delta \sqrt{n/(1-\delta^2)}} e^{-s^2} ds.$$

Pour δ fixé, la borne supérieure tend vers $+\infty$. Par définition de l'intégrale généralisée et par 3) b), le membre de droite tend vers $K\sqrt{1 - \delta^2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir δ assez petit pour que $K\sqrt{1 - \delta^2} > K - \varepsilon/2$. Pour ce δ fixé, la convergence précédente donne, pour n assez grand, $\sqrt{n} u_n > K - \varepsilon$. Avec la majoration initiale, $K - \varepsilon < \sqrt{n} u_n \leq K$ pour n assez grand. Ainsi $\sqrt{n} u_n \rightarrow K$, c'est-à-dire

$$u_n \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

On a seulement pris la limite d'intégrales de e^{-s^2} dont la borne supérieure tend vers l'infini ; aucun échange de limite avec une intégrale dépendant de n n'est utilisé.

6) Code adapté en Python.

Python

```
def produit(t):
    p = 1
    for a in t:
        p = p * a
    return p

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = list(range(1, n + 1))
m = 2 * n + 1
y = list(range(1, m + 1))
v = produit(x)
w = produit(y)
u = 4**n * v**2 / w
print(u)
```

La liste x contient les facteurs de $n!$ et la liste y ceux de $(2n + 1)!$. Ainsi v et w sont ces factorielles ; la dernière affectation applique 5) b). Le produit vide défini égal à 1 garantit aussi le cas $n = 0$. La fonction `produit` travaille avec des entiers Python, qui

évitent le débordement des produits dans un tableau d'entiers de taille fixe ; la division finale fournit une approximation numérique de u_n .

Le script a été exécuté pour $n = 0, 1, 2, 10, 100$; les trois premières sorties sont $1, 2/3$ et $8/15$ à la précision d'affichage. Ses résultats ont été comparés à la récurrence de 5) a).

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

- 1) Puisque $\theta > 0$, la fonction f est positive ou nulle. Elle est continue sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$; ses limites à gauche et à droite de 1 sont respectivement 0 et $1/\theta$, toutes deux finies.

Pour $R \geq 1$, on calcule sur le segment $[1, R]$

$$\int_1^R \frac{1}{\theta} x^{-1-1/\theta} dx = \left[-x^{-1/\theta} \right]_1^R = 1 - R^{-1/\theta}.$$

Comme $1/\theta > 0$, $R^{-1/\theta} \rightarrow 0$. La fonction est nulle avant 1, donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Elle est bien une densité de probabilité. Cette loi est entièrement définie par le sujet ; aucune connaissance d'une loi supplémentaire n'est nécessaire.

- 2) La variable X est presque sûrement positive. Pour $k = 1$ ou $k = 2$, l'intégrande de son moment d'ordre k est $x^k f(x) = \theta^{-1} x^{k-1-1/\theta}$ sur $[1, +\infty[$. Puisque $0 < \theta < 1/2$, on a $1/\theta > 2 \geq k$: l'exposant est strictement inférieur à -1 . Cette intégrale positive converge absolument.

Plus précisément, pour $R \geq 1$,

$$\int_1^R x^k f(x) dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{x^{k-1/\theta}}{k-1/\theta} \right]_1^R.$$

Le terme en R tend vers zéro puisque $k - 1/\theta < 0$. Le théorème de transfert donne alors

$$E(X) = \frac{1}{1-\theta}, \quad E(X^2) = \frac{1}{1-2\theta}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{(1-\theta)^2 - (1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}.$$

Les dénominateurs sont strictement positifs dans le domaine imposé au paramètre. L'espérance et la variance existent donc bien avec ces valeurs.

- 3) Si $x < 1$, la densité est nulle sur $] -\infty, x]$, donc $F(x) = 0$. Si $x \geq 1$, le calcul de la question 1) donne $F(x) = 1 - x^{-1/\theta}$. Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-1/\theta} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions se raccordent en $x = 1$ à la valeur zéro, conformément à la continuité d'une fonction de répartition de variable à densité.

- 4) a) Pour $x < 1$, $F(x) = 0 \neq 1/2$. Pour $x \geq 1$, on peut résoudre en utilisant les puissances de réels strictement positifs :

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-1/\theta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \theta \ln 2 \Leftrightarrow x = 2^\theta.$$

Cette valeur est strictement supérieure à 1, donc admissible, et toutes les équivalences sont réversibles. L'unique solution est $M_e = 2^\theta$.

- 4) b) Posons $h(x) = 2^x(1-x)$ sur $[0, 1/2]$. Sa dérivée est

$$h'(x) = 2^x((1-x) \ln 2 - 1).$$

On a $\ln 2 = \int_1^2 dt/t < \int_1^2 dt = 1$, car $1/t < 1$ sur $]1, 2]$. Comme $1-x \leq 1$ et $\ln 2 > 0$, $(1-x) \ln 2 - 1 \leq \ln 2 - 1 < 0$. Ainsi h est strictement décroissante sur l'intervalle étudié. Elle vérifie donc $h(x) \leq h(0) = 1$, ce qui prouve l'inégalité, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

- 4) c) En appliquant 4) b) à $x = \theta \in]0, 1/2[$, on obtient $2^\theta(1 - \theta) < 1$. Puisque $1 - \theta > 0$, on en déduit

$$M_e = 2^\theta < \frac{1}{1 - \theta} = E(X).$$

L'espérance est donc strictement supérieure à la médiane dans tout le domaine du paramètre.

- 5) a) On a $P(X > a) = 1 - F(a) = a^{-1/\theta} > 0$. De plus $a + b > a$, donc l'événement $[X > a + b]$ est inclus dans $[X > a]$. La définition d'une probabilité conditionnelle donne

$$P(X > a + b \mid X > a) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{(a + b)^{-1/\theta}}{a^{-1/\theta}} = \left(\frac{a}{a + b}\right)^{1/\theta}.$$

- 5) b) Pour $b > 0$ fixé, $a/(a + b) = 1/(1 + b/a)$ tend vers 1 lorsque $a \rightarrow +\infty$. La fonction puissance d'exposant fixé $1/\theta$ est continue au voisinage de 1, donc la probabilité conditionnelle tend vers 1.

Si X est une durée de vie, cette probabilité représente la chance qu'un appareil ayant déjà fonctionné au-delà de l'âge a fonctionne encore plus de b unités de temps. Dans ce modèle, pour un supplément b fixé, cette chance tend vers 1 lorsque l'âge déjà atteint devient très grand. Il s'agit d'une propriété conditionnelle de la loi donnée, et non d'une certitude de durée de vie infinie.

Partie 2 : simulation de X

- 6) a) L'exponentielle est strictement croissante et réciproque du logarithme sur $]0, +\infty[$. Comme $X \geq 1$ presque sûrement, $\ln X$ est défini et, pour tout réel x ,

$$G(x) = P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x).$$

- 6) b) Si $x < 0$, alors $e^x < 1$, donc $G(x) = 0$. Si $x \geq 0$, la formule de F donne $G(x) = 1 - (e^x)^{-1/\theta} = 1 - e^{-x/\theta}$. C'est la fonction de répartition de la loi

exponentielle de paramètre $\lambda = 1/\theta$. Ainsi $Y \sim \mathcal{E}(1/\theta)$, et notamment $E(Y) = \theta$, $V(Y) = \theta^2$.

7) Code adapté en Python.

Pour une valeur donnée de `theta` dans le domaine $]0, 1/2[$, les instructions sont :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

Y = rd.exponential(theta)

X = np.exp(Y)
```

Le premier appel simule une exponentielle d'espérance `theta`, donc de paramètre $1/\theta$, comme en 6) b). Pour vérifier la loi de la seconde variable, si $x < 1$, $P(e^Y \leq x) = 0$; si $x \geq 1$,

$$P(e^Y \leq x) = P(Y \leq \ln x) = 1 - e^{-\ln x / \theta} = 1 - x^{-1/\theta} = F(x).$$

Les instructions produisent donc une simulation de X . Elles ont été exécutées pour plusieurs valeurs admissibles de `theta`. Le paramètre est fourni pour simuler une loi; cela ne suppose pas qu'il soit connu dans la partie d'estimation suivante.

Partie 3 : estimation d'un paramètre

8) a) Question adaptée au programme actuel : les définitions nécessaires à l'étude de l'estimateur sont fournies dans le sujet.

La moyenne $T_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$ est une fonction de l'échantillon et de l'entier connu n ; sa formule ne fait pas intervenir le paramètre inconnu θ . Puisque $E(Y) = \theta$, elle est naturellement destinée à estimer ce paramètre. Elle est donc un estimateur de θ . Pour des observations $y_1, \dots, y_n$, l'estimation observée est le nombre $(y_1 + \dots + y_n)/n$.

8) b) Question adaptée au programme actuel : le biais est défini dans l'énoncé.

Chaque Y_k possède une espérance égale à θ . Par linéarité,

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

Le biais $E(T_n) - \theta$ est donc nul : T_n est sans biais. L'indépendance n'est pas nécessaire à ce calcul d'espérance.

8) c) Question adaptée au programme actuel : les notions de risque quadratique et de convergence de l'estimateur sont définies dans le sujet, puis vérifiées par des calculs particuliers.

Les Y_k sont mutuellement indépendantes et ont chacune une variance finie θ^2 . La variance d'une somme de variables indépendantes et la formule $V(aZ) = a^2V(Z)$ donnent

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Y_k) = \frac{\theta^2}{n}.$$

Puisque $E(T_n) = \theta$, le risque quadratique vaut

$$E((T_n - \theta)^2) = E((T_n - E(T_n))^2) = V(T_n) = \frac{\theta^2}{n}.$$

Enfin, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à T_n , qui possède un moment d'ordre deux, et donne

$$0 \leq P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

C'est exactement la définition fournie d'un estimateur convergent. Le résultat ne repose pas sur une règle générale de calcul de convergences.

9) a) Les moments de T_n ayant été établis, Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2},$$

soit $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \theta^2 / (n\varepsilon^2)$.

- 9) b) L'événement $[\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]]$ est exactement $[|T_n - \theta| \leq \varepsilon]$. Son complément est $[|T_n - \theta| > \varepsilon]$, inclus dans $[|T_n - \theta| \geq \varepsilon]$. Par conséquent

$$P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) = 1 - P(|T_n - \theta| > \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}.$$

La distinction entre les inégalités stricte et large suffit à justifier les bornes fermées de l'intervalle.

- 9) c) Pour tout paramètre admissible, $\theta^2 \leq 1/4$. La question précédente assure donc une probabilité de couverture au moins égale à $1 - 1/(4n\varepsilon^2)$. Pour obtenir au moins 0,9 avec $n = 1000$, on peut choisir ε tel que

$$\frac{1}{4000\varepsilon^2} = 0,1 \iff \varepsilon^2 = \frac{1}{400} \iff \varepsilon = \frac{1}{20} = 0,05.$$

L'intervalle aléatoire $[T_{1000} - 0,05, T_{1000} + 0,05]$ est donc un intervalle de confiance de θ au niveau 90%. Après observation des données, ses bornes sont calculées avec la moyenne observée des 1000 valeurs. Aucun échantillon n'étant donné, on ne peut fournir de bornes numériques supplémentaires.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, 4) a) et 4) b) : Code adapté en Python. La borne supérieure exclusive de `rd.randint`, les saisies et les affichages sont documentés ; les blancs et l'objectif des deux scripts sont conservés.
- Exercice 3, 3) a), 3) b) et 3) d) : les domaines $\sigma > 0$ et $n \geq 1$ sont explicités aux endroits où une variance ou une division par n intervient ; l'indice $n = 0$ reste traité dans toutes les questions où il est admissible.

- Exercice 3, 4) : une indication de comparaison des sommes partielles à une intégrale est ajoutée, afin d'établir la divergence directement sans utiliser un critère général de séries positives hors du contexte probabiliste.
- Exercice 3, 5) c) : la méthode par un équivalent général de factorielles est remplacée par un encadrement gaussien guidé, dont la preuve est entièrement détaillée. Le même équivalent de u_n est démontré, sans résultat extérieur au référentiel.
- Exercice 3, 6) : Code adapté en Python. Un produit de liste est défini par une boucle élémentaire, avec produit vide égal à 1, pour conserver le calcul factoriel et le cas $n = 0$ sans dépendre d'une commande supplémentaire ou d'entiers NumPy à taille fixe.
- Problème, 7) : Code adapté en Python ; `rd.exponential` reçoit l'espérance θ et non le paramètre $1/\theta$, conformément à la syntaxe documentée.
- Problème, 8) a), 8) b) et 8) c) : les notions d'estimateur, de biais, de risque quadratique et de convergence de l'estimateur sont définies localement. Le calcul des moments et une majoration explicite par Bienaymé-Tchebychev établissent les résultats particuliers demandés, sans chapitre théorique d'estimation ajouté.