



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- 1) Vérifier que A n'est pas inversible.
- 2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A , puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = AM$.

- 3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4) a) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.
- 4) b) En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

4) c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle

que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3, E_4 , puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

- 5) a) Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\text{Im}(f)$.
- 5) b) Donner les valeurs propres de f , puis conclure que f est diagonalisable.
- 6) Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

- 6) a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé. Justifier que $X^t X$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f . En déduire que λ est valeur propre de f .
- 6) b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M , montrer que λ est valeur propre de A .

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $1/2$ et celle d'obtenir « face » vaut également $1/2$, une pièce numérotée 1, donnant « face » à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant « pile » à coup sûr. On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment. Les lancers d'une pièce donnée sont indépendants.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement « on obtient pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier « pile », et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier « face ». On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « pile » et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « face ».

1) a) Déterminer $P(X = 1)$.

1) b) Montrer que $\forall n \geq 2, \quad P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1) c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3) Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = 4/3$.

4) Justifier que Y suit la même loi que X .

5) a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2,
 $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j)$.

5) b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2,
 $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(X = i)$.

6) Loi de $X + Y$.

6) a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

6) b) Montrer que $P(X + Y = 1) = 2/3$.

6) c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

6) d) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7) Informatique. On utilise `import numpy.random as rd`. Pour des entiers a et b avec $a < b$, `rd.randint(a, b)` renvoie un entier uniforme dans $a, \dots, b-1$. Des appels successifs produisent les tirages indépendants utilisés dans le modèle. On décide de coder «pile» par 1 et «face» par 0.

7) a) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

Python

```
import numpy.random as rd

piece = rd.randint(0, ...)

x = 1

if piece == 0:
    lancer = rd.randint(..., ...)
    while lancer == 0:
        lancer = ...
        x = ...
else:
    if piece == 1:
        x = ...

print(x)
```

- 7) b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte explicitement dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/(2a)} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f .

- 2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- 3) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = X^2/(2a)$.
 - 3) a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
 - 3) b) On rappelle qu'avec `import numpy.random as rd`, la commande `rd.exponential(s)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'échelle s , donc de paramètre $1/s$, pour $s > 0$. Écrire un script Python simulant la variable aléatoire X à l'aide de ce résultat et affichant sa valeur, pour une valeur de $a > 0$ saisie par l'utilisateur. On pourra utiliser `float(input(...))` pour lire un réel et `np.sqrt` pour la racine carrée.
- 4) a) Vérifier que la fonction g , qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/(2a)}$, est paire.
- 4) b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a , où a est la variance.
- 4) c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.
- 5) a) Rappeler l'espérance de Y , puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
- 5) b) En déduire que la variance de X est donnée par $V(X) = \frac{(4 - \pi)a}{2}$.

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

- 6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X . On note S_n la variable aléatoire définie par

$$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Un estimateur de a est une variable calculée à partir de cet échantillon sans utiliser la valeur inconnue de a . Son biais est $E(S_n) - a$ et il est sans biais si cette différence est nulle. Son risque quadratique est $r_a(S_n) = E((S_n - a)^2)$ lorsqu'il existe. On dit ici que (S_n) est convergent vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|S_n - a| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- 6) a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a .
- 6) b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.
- 6) c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a . En déduire que S_n est un estimateur convergent de a .
- 7) On suppose que a est inférieur ou égal à 1.
- 7) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :
- $$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|S_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$
- 7) b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $[S_n - 1/10, S_n + 1/10]$ est un intervalle de confiance pour a au niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .

1) b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

1) c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$; on ne cherchera pas à calculer les limites de f .

2) a) Montrer que f est impaire.

2) b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

3) b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.

4) b) En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

4) c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$\ln(1+x^2) = 2 \ln x + \ln(1+1/x^2), \text{ puis établir l'équivalent suivant :}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x \ln x.$$

- 4) d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.
- 5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
- 5) a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
- 5) b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
- 5) c) Établir que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3/3$. Pour cela, on pourra d'abord établir, pour $u \geq 0$, l'encadrement $u/(1+u) \leq \ln(1+u) \leq u$, puis en déduire, pour $x > 0$, un encadrement de l'intégrale définissant $f(x)$; utiliser ensuite l'imparité.
- 6) On rappelle qu'avec `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random(m)` renvoie un tableau de m réalisations indépendantes d'une loi uniforme sur $[0, 1[$. Avec `import numpy as np`, `np.log` s'applique terme à terme à un tableau et `np.mean(V)` en renvoie la moyenne arithmétique. Compléter le script Python suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

U = rd.random(100000)

V = np.log(1 + U**2)

f = ...

print(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

7) b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

8) b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Établir l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.

9) b) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? Sur la série de terme général u_n ?

10) a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}.$$

10) b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.

10) c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

10) d) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

10) e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner une valeur approchée de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$