



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) Méthode 1 — Colonnes liées.

La deuxième colonne de A est le double de la première. Ainsi $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$: le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et A n'est pas inversible.

Méthode 2 — Déterminant d'ordre 2.

Pour cette matrice d'ordre 2, le critère d'inversibilité par le déterminant est autorisé : $\det A = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A n'est pas inversible. La première preuve exhibe en outre un vecteur du noyau, qui servira à la recherche des éléments propres.

2) Un produit direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} = 7A$. Si $AV = \lambda V$ avec $V \neq 0$, alors

$0 = (A^2 - 7A)V = \lambda(\lambda - 7)V$, donc $\lambda \in \{0, 7\}$. On ne recherche pas les valeurs propres au moyen d'un déterminant.

Pour $\lambda = 0$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ équivaut à $x + 2y = 0$, d'où $E_0(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Pour $\lambda = 7$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ équivaut à $y = 3x$, d'où $E_7(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$. Ces espaces contiennent des vecteurs non nuls : les deux valeurs candidates sont effectivement propres et $\text{Sp}(A) = \{0, 7\}$.

3) Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit AM est encore une matrice réelle d'ordre 2. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité donne $f(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) = \alpha f(M) + \beta f(N)$. L'application est donc linéaire et de l'espace dans lui-même : c'est un endomorphisme.

4) a) Écrivons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Alors $AM = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix}$ est nul si et seulement

si $x = -2z$ et $y = -2t$.

Ainsi $M = zK_1 + tK_2$, avec $K_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont indépendantes : dans $\alpha K_1 + \beta K_2 = 0$, les coefficients de la deuxième ligne imposent $\alpha = \beta = 0$. Donc (K_1, K_2) est une base du noyau et $\dim \text{Ker}(f) = 2$.

4) b) Le théorème du rang s'applique à cet endomorphisme de l'espace de dimension 4 :

$$\dim \text{Im}(f) = 4 - \dim \text{Ker}(f) = 2.$$

4) c) En multipliant les quatre matrices de la base canonique par A , on obtient :

$$f(E_1) = E_1 + 3E_3, \quad f(E_2) = E_2 + 3E_4, \quad f(E_3) = 2E_1 + 6E_3, \quad f(E_4) = 2E_2 + 6E_4.$$

Les images d'une famille génératrice engendrent l'image. Les troisième et quatrième

images sont les doubles des première et deuxième. Posons $B_1 = E_1 + 3E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et

$B_2 = E_2 + 3E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$, la première ligne donne $\alpha = \beta = 0$. La

famille (B_1, B_2) est donc une base de $\text{Im}(f)$.

5) a) Par les formules précédentes et la linéarité,

$$f(B_1) = f(E_1) + 3f(E_3) = B_1 + 6B_1 = 7B_1,$$

$$f(B_2) = f(E_2) + 3f(E_4) = B_2 + 6B_2 = 7B_2.$$

5) b) Les deux vecteurs K_1, K_2 du noyau sont propres pour 0 ; les deux vecteurs B_1, B_2 sont propres pour 7. Chaque paire est libre, et des familles libres d'espaces propres

distincts forment ensemble une famille libre. Ces quatre matrices constituent donc une base de l'espace de dimension 4.

Dans cette base, la matrice de f est $\text{diag}(0, 0, 7, 7)$. Cela prouve que f est diagonalisable et que ses seules valeurs propres sont 0 et 7. Plus précisément, dans la base canonique sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

la base construite fournit concrètement son changement de base diagonal.

- 6) a) La matrice colonne X est de taille 2×1 et sa transposée de taille 1×2 : leur produit est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $X \neq 0$, au moins une de ses coordonnées x_j est non nulle ; l'entrée diagonale correspondante de $X^t X$ vaut $x_j^2 > 0$. Le produit n'est donc pas nul.

L'associativité et $AX = \lambda X$ donnent $f(X^t X) = A(X^t X) = (AX)^t X = \lambda X^t X$. Ce produit non nul est un vecteur propre de f , de valeur propre λ . Ainsi toute valeur propre de A est une valeur propre de f .

- 6) b) L'égalité $f(M) = \lambda M$ s'écrit $AM = \lambda M$. Colonne par colonne, elle donne $AC_1 = \lambda C_1$ et $AC_2 = \lambda C_2$. Comme $M \neq 0$, au moins l'une des deux colonnes est non nulle. Cette colonne est un vecteur propre de A , de valeur propre λ . On a démontré l'inclusion réciproque, donc les ensembles de valeurs propres réelles de A et f sont égaux.

Exercice 2

Le choix initial donne $P(A_i) = 1/3$ pour $i = 0, 1, 2$. Les probabilités de plusieurs lancers sont calculées conditionnellement à la pièce choisie : les lancers sont indépendants dans ce cadre. Sans ce conditionnement, ils ne sont pas en général indépendants.

1) a) Par la formule des probabilités totales sur (A_0, A_1, A_2) :

$$P(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

1) b) Si $n \geq 2$, aucune des deux pièces déterministes ne permet d'obtenir le premier pile au rang n . Avec la pièce 0, il faut $n - 1$ faces suivies d'un pile. L'indépendance conditionnelle donne donc :

$$P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

1) c) Les événements $[X = n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet. La série géométrique donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} = 1/2.$$

Ainsi :

$$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

On peut aussi l'interpréter : avec la pièce 1, aucun pile n'arrive. Avec la pièce 0, la probabilité de n'avoir aucun pile après N lancers est 2^{-N} , qui tend vers 0, et la probabilité de n'en avoir jamais est donc nulle. Seule la pièce 1 contribue à la masse $1/3$ en 0.

2) Méthode 1 — Série géométrique dérivée.

Tous les termes $nP(X = n)$ sont positifs. La série géométrique dérivée, pour $q = 1/2$,

vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = 1/(1-q)^2 = 4,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n2^{-n} = 2.$$

On peut écrire la loi sous la forme $P(X = n) = \frac{1}{3}2^{-n} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{\{n=1\}}$ pour $n \geq 1$.

La somme des termes d'espérance est donc finie, ce qui en justifie l'existence, et :

$$E(X) = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = 1.$$

Méthode 2 — Décomposition en lois usuelles.

Avec la pièce 0, le rang du premier pile suit une loi géométrique de paramètre $1/2$; avec les pièces 1 et 2, la variable est respectivement égale à 0 et à 1. Pour justifier le calcul sans invoquer une espérance conditionnelle, écrivons les probabilités totales, puis sommons les termes positifs :

$$\sum_{n \geq 0} nP(X = n) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} nP(G = n) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1,$$

où $G \sim \mathcal{G}(1/2)$. Le moment usuel $E(G) = 2$ assure la finitude de cette somme, donc l'existence de $E(X)$, et donne $E(X) = (2 + 0 + 1)/3 = 1$. Cette approche exploite le modèle de mélange et la reconnaissance d'une loi usuelle; la première part directement de la loi déjà calculée.

3) Pour $n = 0$ et $n = 1$, $n(n-1) = 0$. La seconde série géométrique dérivée donne :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} = \frac{2(1/2)^2}{(1-1/2)^3} = 4.$$

Les termes sont non négatifs et leur somme est finie ; le transfert justifie l'existence de $E(X(X-1)) = 4/3$. Comme $X^2 = X(X-1) + X$ et que les deux termes ont une espérance finie, $E(X^2) = 4/3 + 1 = 7/3$. Ainsi X possède une variance et la formule de Koenig-Huygens donne $V(X) = 7/3 - 1^2 = 4/3$.

4) Échanger les noms « pile » et « face » laisse inchangée la pièce 0 et échange les pièces 1 et 2, qui ont la même probabilité d'être choisies. Cette transformation échange X et Y et préserve le modèle probabiliste. Donc X et Y ont la même loi : masse $1/3$ en 0, masse $1/2$ en 1, et $P(Y = j) = 1/(3 \times 2^j)$ pour $j \geq 2$.

5) a) Si $Y = j \geq 2$, le premier lancer est nécessairement un pile, donc $X = 1$. Ainsi $[Y = j] \subset [X = 1]$ et $[X = 1] \cap [Y = j] = [Y = j]$. En prenant les probabilités, on obtient bien l'égalité demandée.

5) b) Si $X = i \geq 2$, le premier lancer est une face, donc $Y = 1$. Ainsi $[X = i] \subset [Y = 1]$, et $[X = i] \cap [Y = 1] = [X = i]$, d'où l'égalité des probabilités.

6) a) Dès le premier lancer, l'une des deux valeurs X, Y est 1. L'autre vaut soit 0, si l'autre résultat n'arrive jamais, soit un entier supérieur ou égal à 2. La somme est donc soit 1, soit un entier supérieur ou égal à 3, et ne vaut ni 0 ni 2.

La valeur 1 est obtenue avec une pièce déterministe, événement de probabilité positive. Pour chaque $n \geq 3$, choisir la pièce 0, puis obtenir $n-2$ piles et une face donne $(X, Y) = (1, n-1)$ avec une probabilité strictement positive. Toutes les valeurs annoncées sont donc effectivement possibles : $(X+Y)(\Omega) = \{1, 3, 4, \dots\}$, avec les conventions de l'énoncé.

6) b) La somme vaut 1 si l'un des deux résultats n'apparaît jamais. Cela est certain avec les pièces 1 et 2, tandis que ces événements ont probabilité nulle avec la pièce 0,

comme en 1) c). Par probabilités totales, $P(X + Y = 1) = P(A_1) + P(A_2) = 2/3$.

6) c) Pour $n \geq 3$, la somme n impose que les deux résultats soient apparus. Celui du premier lancer a son rang égal à 1 ; le rang de l'autre est donc $n - 1$. Cela prouve l'inclusion dans l'union proposée. Réciproquement, chacun des événements de l'union impose la somme n . L'égalité d'événements est donc établie.

6) d) Les deux événements de l'union sont disjoints : leur intersection imposerait $X = 1 = n - 1$, donc $n = 2$, exclu. D'après 5) et l'égalité des lois :

$$P(X + Y = n) = P(Y = n - 1) + P(X = n - 1) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

La somme de ces probabilités pour $n \geq 3$ vaut $1/3$, qui complète bien la masse $2/3$ en 1.

7) a) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

piece = rd.randint(0, 3)
x = 1
if piece == 0:
    lancer = rd.randint(0, 2)
    while lancer == 0:
        lancer = rd.randint(0, 2)
    x = x + 1
else:
    if piece == 1:
        x = 0
print(x)
```

La variable `piece` est uniforme sur les trois numéros. Avec la pièce 0, `x` vaut le numéro du lancer courant : après chaque face, on effectue le lancer suivant et on augmente le

rang d'une unité. La boucle s'arrête au premier pile. Elle termine avec probabilité 1, puisque la probabilité de ses N premiers échecs est $2^{-N} \rightarrow 0$. Avec la pièce 1, le premier pile n'arrive jamais et la convention impose $x = 0$.

- 7) b) Avec la pièce 2, on obtient pile dès le premier lancer. La valeur initiale $x = 1$ est donc déjà correcte : l'absence de traitement supplémentaire de cette pièce est voulue.

Exercice 3

- 1) Puisque $a > 0$, $f(x) \geq 0$ pour tout x . Sur $[0, +\infty[$, f est continue et $f(0) = 0$; à gauche elle est nulle, donc elle est en fait continue sur $\mathbb{R}$, avec des limites latérales finies en tout point.

Pour $R > 0$, une primitive reconnue par dérivation donne :

$$\int_0^R \frac{x}{a} e^{-x^2/(2a)} dx = \left[-e^{-x^2/(2a)} \right]_0^R = 1 - e^{-R^2/(2a)}.$$

Quand $R \rightarrow +\infty$, cette quantité tend vers 1. À gauche de 0, l'intégrale est nulle. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1 : f \text{ est une densité.}$$

- 2) Pour $x < 0$, l'intégrale de f jusqu'à x est nulle. Pour $x \geq 0$, le calcul précédent avec $R = x$ donne :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x^2/(2a)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En particulier, $X \geq 0$ presque sûrement et $P(X = 0) = 0$.

- 3) a) Comme $Y = X^2/(2a) \geq 0$ presque sûrement, $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y \geq 0$, le fait que $X \geq 0$ presque sûrement et $a > 0$ donne :

$$F_Y(y) = P(X \leq \sqrt{2ay}) = 1 - e^{-(2ay)/(2a)} = 1 - e^{-y}.$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 ; ainsi $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

3) b) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

a = float(input("Entrer a strictement positif : "))

Y = rd.exponential(1)

X = np.sqrt(2*a*Y)

print(X)
```

Pour une saisie vérifiant $a > 0$, la racine est définie. La commande simule $Y \sim \mathcal{E}(1)$; la variable $\sqrt{2aY}$ est positive et, pour $x \geq 0$, sa fonction de répartition vaut $P(Y \leq x^2/(2a)) = 1 - e^{-x^2/(2a)}$. Le script simule donc bien la loi de X , sans utiliser une loi supplémentaire comme résultat de cours.

4) a) Pour tout réel x , $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/(2a)} = x^2 e^{-x^2/(2a)} = g(x)$. La fonction g est donc paire et positive.

4) b) La variable Z suit $\mathcal{N}(0, a)$, de densité $x \mapsto e^{-x^2/(2a)}/\sqrt{2\pi a}$. Elle possède un moment d'ordre 2, et $E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = a$. Par transfert :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2a)} dx = a.$$

Cette intégrale de fonction positive est donc convergente et vaut $a\sqrt{2\pi a}$.

4) c) Puisque g est paire, la convergence de son intégrale sur $\mathbb{R}$ donne

$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{2} a\sqrt{2\pi a}$. Pour le moment d'ordre 1 de X , l'intégrande $xf(x)$ est positive sur son support. On a donc bien la convergence absolue nécessaire à

l'espérance, et :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/(2a)} dx = \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} a \sqrt{2\pi a} = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}.$$

- 5) a) La loi $\mathcal{E}(1)$ possède une espérance $E(Y) = 1$. L'égalité $X^2 = 2aY$ assure l'intégrabilité de X^2 , donc l'existence du moment d'ordre 2 de X , avec $E(X^2) = 2aE(Y) = 2a$.

- 5) b) Les moments d'ordres 1 et 2 étant établis, la variance existe et :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2a - \frac{\pi a}{2} = \frac{(4 - \pi)a}{2}.$$

- 6) a) Question adaptée au programme actuel : les notions d'estimation utilisées ici ont été définies dans l'énoncé.

S_n est calculé à partir de l'échantillon par une expression qui n'utilise pas le paramètre inconnu a : c'est bien un estimateur. Chaque X_k^2 est intégrable d'espérance $2a$. La linéarité sur cette somme finie donne :

$$E(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n 2a = a.$$

Son biais est donc nul.

- 6) b) La loi exponentielle de paramètre 1 possède une variance égale à 1 et un moment d'ordre 2 égal à $1 + 1^2 = 2$. Comme $X^2 = 2aY$, X^2 possède une variance et :

$$V(X^2) = (2a)^2 V(Y) = 4a^2.$$

On peut aussi vérifier l'existence et la valeur par le quatrième moment : $X^4 = 4a^2 Y^2$ est intégrable et $E(X^4) = 8a^2$, puis $V(X^2) = 8a^2 - (2a)^2 = 4a^2$.

- 6) c) Question adaptée au programme actuel : on utilise les définitions fournies puis une majoration de probabilités.

Les variables $X_1^2, \dots, X_n^2$ sont indépendantes comme fonctions de variables indépendantes. Leurs variances finies permettent l'additivité des variances :

$$V(S_n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n 4a^2 = \frac{a^2}{n}.$$

Puisque $E(S_n) = a$, le risque quadratique est $r_a(S_n) = E((S_n - a)^2) = V(S_n) = a^2/n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|S_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

C'est exactement la convergence vers a définie dans l'énoncé. La seule convergence du risque, sans cette justification probabiliste, n'aurait pas suffi comme argument de cours supposé connu.

- 7) a) S_n a une espérance a et une variance a^2/n ; pour tout $\varepsilon > 0$, Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$P(|S_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{a^2}{n\varepsilon^2}.$$

Le complémentaire donne $P(|S_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - a^2/(n\varepsilon^2)$. Comme $0 < a \leq 1$, $a^2 \leq 1$, donc $P(|S_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - 1/(n\varepsilon^2)$.

- 7) b) Prenons $\varepsilon = 1/10$. L'événement $|S_n - a| < 1/10$ implique $a \in [S_n - 1/10, S_n + 1/10]$. La probabilité de couverture de cet intervalle aléatoire est donc au moins $1 - 100/n$. Pour qu'elle soit au moins 0,95, il suffit que $100/n \leq 0,05$, soit $n \geq 2000$.

La valeur $n = 2000$ convient, et tout entier plus grand convient également. Il s'agit d'une garantie de couverture obtenue par majoration, pas de l'affirmation que la couverture réelle vaut exactement 95%. Après observation de l'échantillon, les bornes numériques sont les valeurs observées de ces deux variables aléatoires.

Problème

Partie 1 : étude de f

- 1) a) La fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0. Si $x > 0$, son intégrale sur $[0, x]$ est strictement positive : $f(x) > 0$. Si $x < 0$, $f(x) = - \int_x^0 \ln(1 + t^2) dt < 0$. Enfin $f(0) = 0$. Donc $f(x)$ a le même signe que x .
- 1) b) L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$ et f est son intégrale à borne supérieure variable. Le théorème fondamental de l'intégration donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f'(x) = \ln(1 + x^2)$ pour tout réel x .
- 1) c) La dérivée est positive ou nulle et strictement positive hors de 0. Pour justifier la stricte croissance malgré ce zéro isolé, si $x < y$, alors $f(y) - f(x) = \int_x^y \ln(1 + t^2) dt > 0$, car l'intégrande continue positive n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans recherche de ses limites à cette question.
- 2) a) La fonction intégrée est paire. Avec le changement de variable affine $t = -s$, pour tout réel x :

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1 + t^2) dt = - \int_0^x \ln(1 + s^2) ds = -f(x).$$

Ainsi f est impaire.

- 2) b) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = 2x/(1 + x^2)$. Le dénominateur est strictement positif, donc $f'' < 0$ sur $] -\infty, 0[$ et $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction est concave sur $] -\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$. La dérivée seconde change de signe uniquement en 0, donc l'unique point d'inflexion a pour coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$.

- 3) a) Multiplier l'égalité cherchée par $1 + t^2 > 0$ donne $t^2 = a(1 + t^2) + b$. Par identification des coefficients, $a = 1$ et $a + b = 0$, donc $b = -1$.

- 3) b) Sur le segment d'extrémités 0 et x , les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégration par parties, valable aussi pour une intégrale orientée quand $x < 0$, donne :

$$f(x) = [t \ln(1 + t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1 + t^2} dt.$$

En remplaçant $t^2/(1 + t^2)$ par $1 - 1/(1 + t^2)$, on obtient :

$$f(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt,$$

ce qui est l'identité demandée. Aucune primitive trigonométrique n'est nécessaire.

- 4) a) La fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Son intégrale sur $[0, 1]$ est finie. Pour $t \geq 1$, $0 \leq 1/(1 + t^2) \leq 1/t^2$, et $\int_1^{+\infty} t^{-2} dt = 1$ est convergente. La comparaison des intégrales de fonctions positives prouve la convergence de l'intégrale demandée. Notons sa valeur finie L ; il n'est pas nécessaire de la calculer.

- 4) b) Posons $J(x) = \int_0^x 1/(1 + t^2) dt$. Pour $x > 0$, $0 \leq J(x) \leq L$. L'identité de 3) b) donne, pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x \ln(1 + x^2)} = 1 - \frac{2}{\ln(1 + x^2)} + \frac{2J(x)}{x \ln(1 + x^2)}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, le deuxième terme tend vers 0. Le dernier terme est compris entre 0 et $2L/(x \ln(1 + x^2))$, qui tend vers 0. Le quotient tend donc vers 1 : $f(x) \sim x \ln(1 + x^2)$.

- 4) c) Pour $x > 0$, $1 + x^2 = x^2(1 + 1/x^2)$; les facteurs sont positifs, donc les propriétés du logarithme donnent l'identité annoncée. Pour $x > 1$:

$$\frac{\ln(1 + x^2)}{2 \ln x} = 1 + \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{2 \ln x} \rightarrow 1,$$

car le numérateur de la dernière fraction tend vers 0 tandis que son dénominateur tend vers $+\infty$. On justifie ainsi l'équivalent au lieu de composer abusivement une équivalence

avec le logarithme. Par produit et transitivité des équivalents, $f(x) \sim 2x \ln x$ à $+\infty$.

- 4) d) L'imparité permet de remplacer x par $-x > 0$. Quand $x \rightarrow -\infty$,
 $f(x) = -f(-x) \sim -2(-x) \ln(-x) = 2x \ln(-x)$.

- 5) a) Question adaptée au programme actuel : la formule d'ordre 3 de l'original est remplacée, en 5) c), par un encadrement d'intégrale.

Comme $x \mapsto 1 + x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \ln(1 + x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Cela autorise le calcul des trois dérivées demandé ensuite, sans utiliser de développement limité d'ordre 3.

- 5) b) On a $f(0) = 0$, $f'(0) = \ln 1 = 0$ et $f''(0) = 0$. En dérivant $f''(x) = 2x/(1 + x^2)$:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Ainsi $f^{(3)}(0) = 2$.

- 5) c) Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Encadrement explicite.

Pour $u \geq 0$ et $s \in [0, u]$, $1/(1 + u) \leq 1/(1 + s) \leq 1$. En intégrant sur $[0, u]$, on obtient $u/(1 + u) \leq \ln(1 + u) \leq u$. Si $x > 0$ et $0 \leq t \leq x$, cette inégalité avec $u = t^2$ donne :

$$\frac{t^2}{1 + x^2} \leq \frac{t^2}{1 + t^2} \leq \ln(1 + t^2) \leq t^2.$$

L'intégration sur $[0, x]$ fournit $x^3/(3(1 + x^2)) \leq f(x) \leq x^3/3$. En divisant par $x^3/3 > 0$, $1/(1 + x^2) \leq f(x)/(x^3/3) \leq 1$. Le théorème d'encadrement prouve que le quotient tend vers 1 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour $x < 0$, l'imparité donne $f(x)/(x^3/3) = f(-x)/((-x)^3/3)$, donc la même limite à gauche. Ainsi $f(x) \sim x^3/3$ en 0.

Méthode 2 — Intégration d'une estimation locale justifiée.

Le développement d'ordre 1 autorisé de $\ln(1+u)$ donne $\ln(1+u)/u \rightarrow 1$ lorsque $u \rightarrow 0$. En prenant $u = t^2 > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < t < \delta$ implique $(1 - \varepsilon)t^2 \leq \ln(1 + t^2) \leq (1 + \varepsilon)t^2$. L'inégalité reste valable en $t = 0$.

Pour $0 < x < \delta$, intégrer ces inégalités donne $(1 - \varepsilon)x^3/3 \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)x^3/3$. Puisque ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le quotient tend vers 1 à droite. L'impairité donne à nouveau la limite à gauche. Cette seconde preuve montre comment intégrer ici un équivalent grâce à une majoration uniforme explicite sur le petit segment ; la première fournit en plus un encadrement valable pour tout $x > 0$.

6) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

U = rd.random(100000)
V = np.log(1 + U**2)
f = np.mean(V)
print(f)
```

Si U est uniforme sur $[0, 1]$, le transfert donne $E(\ln(1 + U^2)) = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = f(1)$.

La variable transformée est bornée entre 0 et $\ln 2$, donc possède une variance finie. Les 100 000 valeurs de V sont indépendantes et de même loi : leur moyenne fournit l'approximation Monte-Carlo demandée, justifiée par la loi faible des grands nombres. Il s'agit d'une approximation aléatoire, pas d'une preuve d'une valeur exacte de l'intégrale.

Partie 2 : étude d'une suite

7) a) Pour l'exposant 0, la puissance est la fonction constante 1 sur $]0, 1]$; on la prolonge par 1 en 0. Ainsi l'expression intégrale donne $\int_0^1 1 dt = 1 = u_0$. La valeur en l'unique point $t = 0$ ne change d'ailleurs pas l'intégrale. La définition séparée de u_0 est donc cohérente, sans difficulté sur une écriture 0^0 .

7) b) La définition donne directement $u_1 = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = f(1)$.

8) a) Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq \ln(1 + t^2) \leq \ln 2 < 1$. Notons $q(t) = \ln(1 + t^2)$. Pour $n \geq 1$, $q(t)^{n+1} \leq q(t)^n$; pour $n = 0$, $q(t) \leq 1$ est la même comparaison avec l'intégrande de u_0 . L'intégration sur $[0, 1]$ donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$. La suite est décroissante.

8) b) Tous les intégrandes sont positifs ou nuls, donc $u_n \geq 0$. Une suite réelle décroissante et minorée converge vers une limite réelle $\ell \geq 0$.

9) a) Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$, $0 \leq q(t)^n \leq (\ln 2)^n$. Intégrer sur un segment de longueur 1 donne $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$. Pour $n = 0$, l'encadrement est aussi vrai car $u_0 = 1 = (\ln 2)^0$.

9) b) Comme $0 < \ln 2 < 1$, $(\ln 2)^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 0$ par encadrement.

Pour la série, utilisons directement ses sommes partielles afin de rester dans l'étude élémentaire des séries de première année. Pour tout $N \geq 0$:

$$0 \leq \sum_{k=0}^N u_k \leq \sum_{k=0}^N (\ln 2)^k = \frac{1 - (\ln 2)^{N+1}}{1 - \ln 2} \leq \frac{1}{1 - \ln 2}.$$

Les sommes partielles sont croissantes puisque les termes sont positifs, et majorées par cette constante. Elles convergent donc : la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

est convergente.

- 10) a) Sur $[0, 1]$, $1 - q(t) \geq 1 - \ln 2 > 0$. Les fonctions intégrées sont continues, leurs dénominateurs ne s'annulent pas, et :

$$0 \leq \frac{q(t)^n}{1 - q(t)} \leq \frac{q(t)^n}{1 - \ln 2}.$$

Par intégration, $0 \leq \int_0^1 q(t)^n / (1 - q(t)) dt \leq u_n / (1 - \ln 2)$, avec la même convention pour l'exposant 0 qu'en 7) a).

- 10) b) Le majorant tend vers 0, car $u_n \rightarrow 0$ et $1 - \ln 2$ est une constante strictement positive. Le théorème d'encadrement donne donc la limite demandée égale à 0.

- 10) c) Pour $t \in [0, 1]$, $q(t) \neq 1$. La somme géométrique finie vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} q(t)^k = (1 - q(t)^n) / (1 - q(t)).$$

La linéarité d'une somme finie d'intégrales donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} q(t)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - q(t)^n}{1 - q(t)} dt.$$

- 10) d) La fonction $1/(1 - q(t))$ est continue sur $[0, 1]$; son intégrale I existe. L'identité précédente s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = I - \int_0^1 \frac{q(t)^n}{1 - q(t)} dt.$$

Le reste intégral tend vers 0 d'après 10) b). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette

identité finie, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = I = \int_0^1 1/(1 - \ln(1 + t^2)) dt.$$

Aucun échange d'une somme infinie et d'une intégrale n'a été utilisé.

10) e) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

U = rd.random(100000)
V = 1/(1 - np.log(1 + U**2))
S = np.mean(V)
print(S)
```

Pour une uniforme U sur $[0, 1]$, la variable $1/(1 - \ln(1 + U^2))$ est comprise entre 1 et $1/(1 - \ln 2)$; elle possède donc une espérance et une variance finies. Son espérance vaut I par transfert. La moyenne de ses 100 000 réalisations indépendantes approche ainsi la somme de la série par la méthode de Monte-Carlo et la loi faible des grands nombres.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule : l'indépendance des lancers conditionnellement à la pièce choisie, utilisée dans le modèle, est explicitée.
- Exercice 2, question 7) a) : Code adapté en Python; les tirages entiers utilisent la borne supérieure exclusive de `rd.randint`, documentée dans l'énoncé. Les blancs et les branches du script sont conservés.

- Exercice 3, question 3) b) : Code adapté en Python ; l'échelle de `rd.exponential`, la lecture de a et la racine carrée sont documentées. Question 4) b) : la convention « a est la variance » de la loi normale est explicitée.
- Exercice 3, question 6), sous-questions a) et c) : Question adaptée au programme actuel ; les notions de biais, risque quadratique et convergence sont définies localement, puis la convergence particulière est prouvée par Bienaymé-Tchebychev.
- Problème, question 5) a) et c) : Question adaptée au programme actuel ; la formule d'ordre 3 est retirée et remplacée par une indication d'encadrement du logarithme et de son intégrale. Les calculs de dérivées de 5) b), le résultat et les dépendances sont conservés.
- Problème, questions 6) et 10) e) : Code adapté en Python ; simulation uniforme, logarithme sur tableau et moyenne sont documentés. Les exemples de séries des questions 9) et 10) sont résolus par leurs sommes partielles et une identité finie, sans importer de théorème extérieur.