



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2017

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) La fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est une fonction polynomiale des deux coordonnées. Ses dérivées partielles de tout ordre existent et sont continues sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) En dérivant par rapport à une coordonnée en tenant l'autre constante, on obtient :

$$\partial_1 f(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 4(x^3 - x + y),$$

$$\partial_2 f(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 4(y^3 + x - y).$$

2) b) Le gradient est le vecteur colonne formé des deux dérivées partielles précédentes. Il est nul si et seulement si chacune est nulle. En divisant les deux égalités par 4, on obtient exactement :

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

2) c) En additionnant les deux équations, on obtient $x^3 + y^3 = 0$, donc $x^3 = (-y)^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ainsi $y = -x$. La première équation devient alors :

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0.$$

Les seules possibilités sont $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$. Chacune, associée à $y = -x$, vérifie les deux équations. Les points critiques sont donc exactement $O = (0, 0)$, $P = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $Q = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3) a) Les dérivées secondes sont :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 12x^2 - 4, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 12y^2 - 4,$$

$$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = 4.$$

L'égalité des dérivées mixtes est également conforme au théorème de Schwarz, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3) b) La hessienne est $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$H_f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_f(P) = H_f(Q) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

3) c) Pour toute matrice $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient

$Hv = (a + b)v$ et $Hw = (a - b)w$. Ils sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$; les valeurs propres sont donc $a + b$ et $a - b$, sans calcul de déterminant.

En O , elles sont 0 et -8 . La présence de la valeur propre nulle empêche de conclure par le critère suffisant des extrema.

En P et en Q , les valeurs propres sont 24 et 16, toutes deux strictement positives. Ces points sont critiques et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert les contenant : le critère de la hessienne donne un minimum local strict en chacun. Leur valeur commune est :

$$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 4 - 2(2\sqrt{2})^2 = -8.$$

Par symétrie, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ également.

3) d) Le critère précédent étant insuffisant en O , on étudie directement les deux droites demandées :

$$f(x, x) = 2x^4 > 0 = f(O) \quad \text{si } x \neq 0,$$

$$f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) < 0 = f(O) \quad \text{si } 0 < |x| < 2.$$

On peut donc trouver, aussi près de O que l'on veut, des points où f est supérieure à

$f(O)$ et d'autres où elle lui est inférieure. Le point O est un point selle et n'est ni un minimum local ni un maximum local.

4) a) En développant les carrés, on a :

$$(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 = f(x, y) + 8.$$

La différence demandée vaut donc constamment -8 .

4) b) L'identité précédente s'écrit :

$$f(x, y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq 0.$$

Ainsi $f(x, y) \geq -8$ sur tout $\mathbb{R}^2$. L'égalité exige simultanément $x^2 = 2$, $y^2 = 2$ et $x + y = 0$; elle est donc atteinte exactement en P et Q . Les deux minima locaux identifiés sont les deux points de minimum global, et la valeur minimale globale est -8 .

5) a) Code adapté en Python. La fonction doit renvoyer exactement l'expression de f ; les opérateurs agissent aussi élément par élément sur les grilles de coordonnées.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, y):
    return x**4 + y**4 - 2*(x-y)**2

x = np.linspace(-2, 2, 101)
y = x
X, Y = np.meshgrid(x, y)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
ax.plot_surface(X, Y, f(X, Y), cmap="gray", edgecolor="black", linewidth=0.2)
```

```
plt.show()
```

Les tableaux X et Y ont 101 lignes et 101 colonnes ; $f(X, Y)$ donne les hauteurs aux 10201 couples de coordonnées. Le code représente bien la restriction de f au carré $[-2, 2]^2$.

- 5) b) La bonne représentation est la Nappe 1. La fonction possède deux creux de hauteur -8 , aux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, séparés par le point selle $(0, 0)$ de hauteur 0. En outre $f(2, 2) = f(-2, -2) = 32$ et $f(2, -2) = f(-2, 2) = 0$, ce qui distingue les deux types de coins.

La Nappe 2 reste non négative, contrairement à f ; la Nappe 3 descend visiblement en dessous de -8 , contrairement à la minoration globale de la question 4). La Nappe 1 présente les deux creux et les hauteurs relatives attendues. La lecture graphique est ici confortée par les résultats exacts établis précédemment.

Exercice 2

- 1) a) Pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$ donne, pour tout réel x :

$$(\varphi(\alpha P + \beta Q))(x) = \int_0^1 (\alpha P(x+t) + \beta Q(x+t)) dt = \alpha(\varphi(P))(x) + \beta(\varphi(Q))(x).$$

Les intégrandes sont des polynômes de t , donc continues sur ce segment. L'égalité vaut pour tout x , ce qui établit la linéarité de φ comme application vers les fonctions réelles.

- 1) b) Les trois intégrales se calculent directement :

$$(\varphi(e_0))(x) = \int_0^1 1 dt = 1,$$

$$(\varphi(e_1))(x) = \int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2},$$

$$(\varphi(e_2))(x) = \int_0^1 (x^2 + 2xt + t^2) dt = x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

Par conséquent $\varphi(e_0) = e_0$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2$.

1) c) Tout $P \in E$ s'écrit $P = ae_0 + be_1 + ce_2$. Par linéarité,
 $\varphi(P) = a\varphi(e_0) + b\varphi(e_1) + c\varphi(e_2)$; les trois images de la base appartiennent à E ,
 donc $\varphi(P) \in E$. Ainsi φ est une application linéaire de E dans lui-même, c'est-à-dire
 un endomorphisme de E .

2) a) Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de la
 base :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sa première ligne est bien celle annoncée.

2) b) Méthode 1 — Matrice triangulaire.

La matrice A est triangulaire supérieure et ses trois coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc non nuls. Elle est inversible. L'endomorphisme φ est donc un automorphisme de E .

Méthode 2 — Noyau et dimension.

Si $P = ae_0 + be_1 + ce_2$, alors $\varphi(P) = (a + b/2 + c/3)e_0 + (b + c)e_1 + ce_2$. Si $\varphi(P) = 0$,
 l'indépendance de la base impose successivement $c = 0$, $b + c = 0$, puis
 $a + b/2 + c/3 = 0$, donc $a = b = c = 0$. Le noyau est nul; puisque φ est un
 endomorphisme de l'espace de dimension finie E , il est bijectif.

La première méthode lit l'inversibilité sur la matrice; la seconde montre directement

pourquoi aucune fonction polynomiale non nulle n'est envoyée sur zéro.

- 2) c) Pour $\lambda \neq 1$, la matrice $A - \lambda I_3$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux, tous égaux à $1 - \lambda$, sont non nuls ; elle est donc inversible. Aucun tel λ n'est valeur propre. En revanche, $Ae_1^{\text{col}} = e_1^{\text{col}}$ pour le vecteur colonne $e_1^{\text{col}} = {}^t(1, 0, 0)$: 1 est bien valeur propre.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient 1, donc à I_3 . Cela imposerait $A = PI_3P^{-1} = I_3$, ce qui est faux puisque son coefficient de ligne 1, colonne 2 vaut $1/2$. Ainsi ni A ni φ ne sont diagonalisables. Cette preuve ne nécessite aucun calcul de polynôme caractéristique.

3) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

n = int(input("Entrez une valeur entière naturelle pour n : "))
A = np.array([[1, 1/2, 1/3], [0, 1, 1], [0, 0, 1]])
print(al.matrix_power(A, n))
```

La fonction `al.matrix_power` calcule une puissance matricielle ; l'élévation séparée des coefficients à la puissance n ne conviendrait pas. Pour $n = 0$, la sortie est I_3 , comme attendu.

- 4) a) Au rang 0, $A^0 = I_3$, ce qui donne la forme demandée avec $u_0 = 0$.

Supposons la forme acquise à un rang $n \in \mathbb{N}$. Le produit $A^{n+1} = A^n A$ vaut :

$$\begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_n + n/2 + 1/3 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme est donc conservée et $u_{n+1} = u_n + n/2 + 1/3 = u_n + (3n+2)/6$. Par récurrence, le résultat vaut pour tout entier naturel n .

4) b) Pour $n \geq 1$, on somme les différences successives :

$$u_n = u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j) = \frac{1}{6} \left(3 \sum_{j=0}^{n-1} j + 2n \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{3n(n-1)}{2} + 2n \right) = \frac{n(3n+1)}{12}.$$

La formule donne aussi $u_0 = 0$; elle est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) c) Méthode 1 — Utilisation de la suite calculée.

En remplaçant u_n dans la matrice de la question 4) a), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & n(3n+1)/12 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Binôme matriciel.

Posons $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un produit direct donne $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$N^3 = 0$. Comme I_3 et N commutent, le binôme de Newton s'applique à $(I_3 + N)^n$. Pour $n \geq 2$, tous les termes d'indice au moins 3 sont nuls :

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

Cette formule se vérifie directement aussi pour $n = 0$ et $n = 1$. Le coefficient de ligne 1, colonne 3 est $n/3 + n(n-1)/4 = n(3n+1)/12$, et les autres coefficients donnent exactement le tableau précédent. La récurrence suit l'évolution des coefficients ; le binôme exploite la structure concrète de $A - I_3$.

Exercice 3

- 1) a) La variable V est strictement positive presque sûrement ; on peut définir W arbitrairement sur l'événement négligeable où le logarithme ne serait pas défini.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la décroissance de $v \mapsto -\ln v$ sur $]0, +\infty[$ donne :

$$F_W(x) = P(-\ln V \leq x) = P(V \geq e^{-x}).$$

Comme $e^{-x} > 0$ et que la loi de V est à densité, les probabilités ponctuelles sont nulles. Ainsi $P(V \geq e^{-x}) = 1 - F_V(e^{-x}) = e^{-e^{-x}}$, ce qui établit la formule annoncée.

- 1) b) La fonction $F_W(x) = e^{-e^{-x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc continue et de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors d'un ensemble fini de points, ici vide. La définition d'une variable à densité s'applique. Une densité est :

$$f_W(x) = F'_W(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Cette densité est positive et continue sur tout $\mathbb{R}$.

- 2) a) Si $x < 0$, le maximum de variables positives presque sûrement ne peut être inférieur ou égal à x ; donc $F_{Y_n}(x) = 0$. Si $x \geq 0$, on a l'égalité d'événements :

$$\{Y_n \leq x\} = \bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq x\}.$$

Les variables étant indépendantes, ces événements sont mutuellement indépendants.

Ainsi :

$$F_{Y_n}(x) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x) = (1 - e^{-x})^n.$$

Au point $x = 0$, cette expression vaut 0, donc rejoint la branche précédente. On obtient exactement la fonction de répartition de l'énoncé.

2) b) On dérive sur chacun des intervalles où la fonction de répartition est de classe $\mathcal{C}^1$.

Une densité est :

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La valeur choisie en 0 est sans effet sur les probabilités et évite toute convention sur une puissance 0^0 pour $n = 1$. Les limites à gauche et à droite en 0 sont finies : la limite droite vaut 1 pour $n = 1$ et 0 pour $n \geq 2$. La densité reste dans le cadre autorisé. Pour $n = 1$, on retrouve la densité exponentielle de paramètre 1.

3) a) La factorisation d'une différence de puissances donne, pour $t \geq 0$:

$$1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^n = e^{-t} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - e^{-t})^j.$$

Pour n fixé, chacun des n termes de cette somme finie tend vers 1 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Ainsi :

$$1 - F_{Y_n}(t) \sim ne^{-t}.$$

De plus, $0 \leq 1 - F_{Y_n}(t) \leq ne^{-t}$ sur tout $[0, +\infty[$. Le majorant est intégrable et l'intégrande est continue : le critère de comparaison des intégrales positives assure la

convergence de $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$.

3) b) On travaille sur le segment $[0, x]$, avec $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto 1 - (1 - e^{-t})^n$ y est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $-ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}$, avec le prolongement continu à droite en 0. Ce prolongement ne diffère éventuellement de $-f_{Y_n}$ qu'en 0, sans effet sur l'intégrale.

L'intégration par parties avec la primitive t de la fonction constante 1 donne :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = [t(1 - F_{Y_n}(t))]_0^x + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt.$$

Le terme en 0 est nul ; c'est donc l'identité demandée. Pour $x = 0$, les deux membres sont nuls également.

3) c) D'après l'encadrement de la question 3) a), pour $x \geq 0$:

$$0 \leq x(1 - F_{Y_n}(x)) \leq nxe^{-x}.$$

La croissance de l'exponentielle l'emporte sur celle de x , donc $nxe^{-x} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne la limite nulle demandée.

3) d) En réarrangeant l'identité de la question 3) b), on obtient :

$$\int_0^x t f_{Y_n}(t) dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt - x(1 - F_{Y_n}(x)).$$

Le premier terme de droite possède une limite finie d'après 3) a), et le second tend vers 0 d'après 3) c). Ainsi $\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$ converge. Comme Y_n est positive presque sûrement et que sa densité est nulle sur $] -\infty, 0[$, cette convergence est aussi la convergence absolue nécessaire à l'existence de son espérance.

En passant à la limite dans l'égalité établie sur segment, on conclut :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt.$$

La formule n'a donc pas été supposée connue : elle a été démontrée pour la variable étudiée.

4) a) Pour $x \geq 0$ fini, le changement de variable imposé $u = 1 - e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $[0, x]$. Il envoie les bornes 0 et x sur 0 et $1 - e^{-x} < 1$; son inverse vérifie $dt = du/(1 - u)$. Par conséquent :

$$\int_0^x (1 - (1 - e^{-t})^n) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u} du.$$

Le dénominateur ne s'annule pas sur le segment d'intégration. Pour $x = 0$, les deux intégrales sont nulles.

4) b) Sur ce segment, la somme géométrique finie donne

$$\frac{1 - u^n}{1 - u} = \sum_{j=0}^{n-1} u^j.$$

La linéarité d'une somme finie et l'intégration des monômes donnent alors :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1 - e^{-x})^{j+1}}{j+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, chacun des n termes tend vers $1/k$. La somme est finie et l'identité de la question 3) d) s'applique, d'où :

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En particulier, pour $n = 1$, on retrouve $E(Y_1) = 1$.

5) a) Code adapté en Python. Le maximum de l'échantillon simule Y_n ; il faut ensuite retrancher $\ln n$.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simul_Z(n):
    x = rd.exponential(1, n)
```

```
Z = np.max(x) - np.log(n)
return Z
```

La fonction est utilisée pour un entier $n \geq 1$, de sorte que le tableau n'est pas vide et que le logarithme est défini. Le paramètre d'échelle 1 correspond bien au paramètre exponentiel 1. La variable renvoyée est explicitement Z , ce qui rectifie l'incohérence entre le nom de sortie et la variable calculée dans la déclaration d'origine.

- 5) b) Les deux histogrammes ont des formes et des hauteurs très proches pour $n = 1000$. On conjecture que Z_n converge en loi vers une variable de loi de Gumbel, c'est-à-dire vers la loi de W .

Code adapté en Python. Les deux scripts complets, avec leur fonction auxiliaire, sont :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_Z(n):
    x = rd.exponential(1, n)
    return np.max(x) - np.log(n)

V = rd.exponential(1, 10000)
W = -np.log(V)
s = np.linspace(0, 10, 11)
plt.hist(W, bins=s, weights=np.ones(10000)/10000,
         color="white", edgecolor="black")
plt.show()

n = int(input("Entrez la valeur entière strictement positive de n : "))
Z = []
for k in range(10000):
    Z.append(simul_Z(n))
s = np.linspace(0, 10, 11)
```

```
plt.figure()
plt.hist(Z, bins=s, weights=np.ones(10000)/10000,
        color="white", edgecolor="black")
plt.show()
```

Le second appel à `plt.figure()` crée une figure distincte si les deux scripts sont exécutés dans la même session. Les classes représentées ne couvrent pas les valeurs négatives, pourtant possibles pour W et Z_n ; les poids $1/10000$ conservent la proportion par rapport à l'ensemble des tirages. La ressemblance observée sur ces classes suggère la conjecture, mais ne constitue pas une preuve de convergence en loi ; celle-ci est établie à la question 6).

- 6) a) Pour tout réel x , l'égalité $Z_n = Y_n - \ln n$ donne l'équivalence d'événements $\{Z_n \leq x\} = \{Y_n \leq x + \ln n\}$. En prenant les probabilités, on obtient $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$.

- 6) b) Si $x < -\ln n$, alors $x + \ln n < 0$, donc $F_{Z_n}(x) = 0$. Sinon :

$$F_{Z_n}(x) = (1 - e^{-(x+\ln n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n.$$

Ainsi :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln n, \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln n. \end{cases}$$

Au point de raccord $x = -\ln n$, la seconde expression vaut 0, donc la fonction reste continue.

- 6) c) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $q = e^{-x} > 0$. Pour tout entier $n > q$, le nombre $1 - q/n$ est strictement positif et le logarithme est défini. La dérivabilité de $h \mapsto \ln(1 + h)$ en 0 donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

Avec $h = -q/n$, il vient :

$$n \ln(1 - q/n) = -q \frac{\ln(1 - q/n)}{-q/n} \rightarrow -q = -e^{-x}.$$

La limite porte sur les termes à partir d'un rang où ils sont définis, ce qui suffit pour une limite de suite.

- 6) d) Pour x fixé, on a $x \geq -\ln n$ à partir d'un certain rang. La formule de 6) b) et la continuité de l'exponentielle donnent donc :

$$F_{Z_n}(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-e^{-x}} = F_W(x).$$

Cette convergence vaut pour tout réel x ; la fonction F_W est continue partout. Par la définition de la convergence en loi à l'aide des fonctions de répartition, Z_n converge en loi vers W . La conjecture de la question 5) b) est ainsi démontrée.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire.

On note $p_{n,j} = P(X_n = j)$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Au premier déplacement, le mobile quitte le sommet 1 pour l'un des trois autres sommets avec la même probabilité. Ainsi $p_{1,1} = 0$ et $p_{1,2} = p_{1,3} = p_{1,4} = 1/3$; la loi de X_1 est uniforme sur $\{2, 3, 4\}$. Son support est fini, donc son espérance existe et vaut :

$$E(X_1) = \frac{2 + 3 + 4}{3} = 3.$$

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans l'énoncé d'origine :

$p_{2,1} = 1/3$ et $p_{2,2} = p_{2,3} = p_{2,4} = 2/9$. Il fournit notamment l'initialisation du support complet à la question suivante et sert à vérifier les petits rangs.

- 2) Pour $n = 2$, les quatre probabilités de la loi admise sont strictement positives. Supposons qu'à un instant $n \geq 2$, chacun des quatre sommets soit accessible avec une probabilité strictement positive. Pour un sommet cible j , choisissons un sommet $i \neq j$; la probabilité d'être en i au rang n est strictement positive et la transition de i

vers j a probabilité $1/3$. Leur produit est strictement positif, donc j est accessible au rang $n + 1$.

Par récurrence, pour tout $n \geq 2$, l'ensemble des valeurs prises par X_n est $\{1, 2, 3, 4\}$.

- 3) a) Pour $n \geq 2$, les événements $\{X_n = i\}$, pour $i = 1, 2, 3, 4$, forment un système complet et sont tous de probabilité strictement positive. La formule des probabilités totales peut donc s'écrire avec les probabilités conditionnelles. Depuis 1, le mobile ne peut rester en 1, tandis que depuis chacun des trois autres sommets il rejoint 1 avec probabilité $1/3$. Ainsi :

$$p_{n+1,1} = 0 p_{n,1} + \frac{1}{3} p_{n,2} + \frac{1}{3} p_{n,3} + \frac{1}{3} p_{n,4} = \frac{1}{3} (p_{n,2} + p_{n,3} + p_{n,4}).$$

- 3) b) Pour $n = 0$, le membre de gauche vaut $p_{1,1} = 0$ et celui de droite vaut $(p_{0,2} + p_{0,3} + p_{0,4})/3 = 0$, puisque $X_0 = 1$.

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut $p_{2,1} = 1/3$ d'après la loi admise, et celui de droite vaut $(1/3 + 1/3 + 1/3)/3 = 1/3$. La relation reste donc valable pour ces deux rangs, sans conditionner par un événement de probabilité nulle.

- 3) c) À tout instant, le mobile occupe exactement un des quatre sommets. Les événements $\{X_n = j\}$ sont donc incompatibles deux à deux et leur réunion est l'événement certain, même lorsque certains ont une probabilité nulle. Ainsi

$$\sum_{j=1}^4 p_{n,j} = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remplaçant $p_{n,2} + p_{n,3} + p_{n,4}$ par $1 - p_{n,1}$ dans la relation des deux questions précédentes, on obtient :

$$p_{n+1,1} = \frac{1 - p_{n,1}}{3} = -\frac{1}{3} p_{n,1} + \frac{1}{3}.$$

- 3) d) Le réel $1/4$ vérifie $1/4 = -(1/3)(1/4) + 1/3$. En le retranchant à la récurrence, on obtient :

$$p_{n+1,1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(p_{n,1} - \frac{1}{4} \right).$$

La suite $p_{n,1} - 1/4$ est géométrique de raison $-1/3$ et de premier terme $p_{0,1} - 1/4 = 3/4$. Par conséquent :

$$p_{n,1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 4) a) Pour $n \geq 2$, on applique la même formule des probabilités totales à la cible 2 : une transition vers 2 a probabilité $1/3$ depuis 1, 3 ou 4, et probabilité nulle depuis 2. Ainsi :

$$p_{n+1,2} = \frac{1}{3}(p_{n,1} + p_{n,3} + p_{n,4}).$$

Pour $n = 0$, les deux membres valent respectivement $p_{1,2} = 1/3$ et $(1 + 0 + 0)/3 = 1/3$. Pour $n = 1$, ils valent respectivement $p_{2,2} = 2/9$ et $(0 + 1/3 + 1/3)/3 = 2/9$. La relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 4) b) Comme la somme des quatre probabilités vaut 1, on a $p_{n,1} + p_{n,3} + p_{n,4} = 1 - p_{n,2}$. Ainsi :

$$p_{n+1,2} = -\frac{1}{3}p_{n,2} + \frac{1}{3}.$$

- 4) c) En retranchant encore le point fixe $1/4$, on obtient

$p_{n+1,2} - 1/4 = -(1/3)(p_{n,2} - 1/4)$. Or $p_{0,2} = 0$, donc $p_{0,2} - 1/4 = -1/4$. La formule géométrique donne :

$$p_{n,2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 5) Les deux récurrences pour les sommets 3 et 4 sont admises dans l'énoncé ; elles sont identiques à celle de $p_{n,2}$. Leurs termes initiaux sont aussi les mêmes, puisque $p_{0,2} = p_{0,3} = p_{0,4} = 0$.

Une même relation de récurrence et un même terme initial déterminent les mêmes termes successifs. On en déduit sans nouveau calcul :

$$p_{n,3} = p_{n,4} = p_{n,2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

6) Méthode 1 — Utilisation de la loi.

Le support de X_n est fini, donc son espérance existe. Posons $q_n = (-1/3)^n$. D'après les lois précédentes :

$$E(X_n) = p_{n,1} + 2p_{n,2} + 3p_{n,3} + 4p_{n,4} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}q_n\right) + 9\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}q_n\right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}q_n.$$

Ainsi $E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}(-1/3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on retrouve $E(X_0) = 1$ et $E(X_1) = 3$.

Méthode 2 — Récurrence directe sur l'espérance.

Les relations déjà établies donnent, pour chaque cible j et tout n ,

$$p_{n+1,j} = (1/3) \sum_{i \neq j} p_{n,i}.$$

En réordonnant uniquement des sommes finies :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 j \sum_{i \neq j} p_{n,i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 p_{n,i} \sum_{j \neq i} j = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 p_{n,i} (10 - i) = \frac{10 - E(X_n)}{3}.$$

Le point fixe vaut $5/2$. La suite $E(X_n) - 5/2$ est donc géométrique de raison $-1/3$, de premier terme $1 - 5/2 = -3/2$, ce qui redonne $E(X_n) = 5/2 - (3/2)(-1/3)^n$.

La première méthode réutilise toute la loi; la seconde obtient l'espérance par une récurrence scalaire, sans faire appel à une notion d'espérance conditionnelle.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A .

7) a) Le coefficient de colonne j du produit $U_n A$ est

$$\sum_{i=1}^4 p_{n,i} A_{i,j} = (1/3) \sum_{i \neq j} p_{n,i}.$$

C'est précisément $p_{n+1,j}$, d'après la partie 1. Les quatre coefficients donnent donc $U_{n+1} = U_n A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La convention est bien celle de probabilités en ligne : $A_{i,j}$ est la probabilité de transition de i vers j , les coefficients de A sont positifs ou nuls et chaque ligne est de somme 1.

7) b) Au rang 0, $U_0 = U_0 I_4 = U_0 A^0$. Si $U_n = U_0 A^n$, alors la relation précédente donne $U_{n+1} = U_n A = U_0 A^n A = U_0 A^{n+1}$. Par récurrence, $U_n = U_0 A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) c) Comme $X_0 = 1$, on a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit $U_0 A^n$ est donc la première ligne de A^n . En posant :

$$d_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad c_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

cette première ligne vaut $\begin{pmatrix} d_n & c_n & c_n & c_n \end{pmatrix}$.

8) Si l'on place le mobile initialement au sommet j , sa loi initiale est la ligne comportant 1 en colonne j et 0 ailleurs ; sa loi au rang n est alors la ligne j de A^n .

Le protocole autorise avec la même probabilité tout déplacement vers un autre sommet. Il est inchangé par une permutation des numéros de sommets. Le résultat obtenu au départ du sommet 1 donne donc, au départ de j , la probabilité d_n de revenir en j et la probabilité c_n d'être en chacun des trois autres sommets.

Les trois autres lignes sont ainsi $\begin{pmatrix} c_n & d_n & c_n & c_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_n & c_n & d_n & c_n \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} c_n & c_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$. On en déduit le tableau entier :

$$A^n = \begin{pmatrix} d_n & c_n & c_n & c_n \\ c_n & d_n & c_n & c_n \\ c_n & c_n & d_n & c_n \\ c_n & c_n & c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, $d_0 = 1$ et $c_0 = 0$, ce qui redonne I_4 .

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A .

9) Un coefficient hors diagonale de $aI + bJ$ vaut b , donc il faut $b = 1/3$. Un coefficient diagonal vaut $a + b$ et doit être nul, donc $a = -1/3$. On a ainsi :

$$A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J.$$

10) a) Chaque coefficient de J^2 est la somme de quatre produits égaux à 1 ; donc $J^2 = 4J$.

Pour $k = 1$, on a bien $J = 4^0 J$. Si $J^k = 4^{k-1} J$, alors $J^{k+1} = J^k J = 4^{k-1} J^2 = 4^k J$. La récurrence établit $J^k = 4^{k-1} J$ pour tout entier $k \geq 1$.

10) b) Les matrices I et J commutent, puisque $IJ = JI = J$. Le binôme matriciel peut donc être appliqué. Pour $n \geq 1$, on sépare le terme d'indice $k = 0$, puis on utilise 10) a) :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 4^{k-1} J.$$

Le coefficient de J se réécrit :

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right].$$

Ainsi :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] J.$$

Ses coefficients diagonaux sont d_n et ses coefficients hors diagonale c_n , conformément à la méthode probabiliste de la partie 2. La méthode demandée fournit ici une seconde démonstration complète des mêmes puissances, fondée sur le binôme plutôt que sur les lois de la chaîne.

- 10) c) Pour $n = 0$, la formule donne $I + (1/4)(1 - 1)J = I = A^0$. Elle reste donc valable au rang 0.

Partie 4 : informatique.

- 11) a) Code adapté en Python. La matrice doit être la matrice de transition A et le comptage est la somme des indicatrices des retours en 1.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

A = np.array([[0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 1],
              [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 0]])/3

x = np.zeros(100, dtype=int)

position = 1

for k in range(100):
    u = rd.random()

    j = 0

    cumul = A[position-1, j]
```

```

while u >= cumul:
    j = j + 1
    cumul = cumul + A[position-1, j]
    position = j + 1
    x[k] = position
n = np.sum(x == 1)
print(x)
print(n)

```

À chaque déplacement, la ligne $A[\text{position}-1, :]$ décrit les probabilités du sommet suivant. Le tirage uniforme choisit un intervalle de longueur $A_{i,j}$ dans le cumul de cette ligne : le sommet $j + 1$ est donc sélectionné avec la bonne probabilité. Les probabilités étant de somme 1 et le tirage vérifiant $u < 1$, la boucle trouve une colonne avant de dépasser la matrice. Un coefficient de transition nul correspond à un intervalle vide et ne peut sélectionner le sommet courant.

L'initialisation $\text{position} = 1$ représente l'instant 0 ; le premier élément $x[0]$ est enregistré après le premier déplacement. Le tableau contient donc exactement $X_1, \dots, X_{100}$ et exclut la position d'origine. La comparaison $x == 1$ produit les indicatrices de retour, et leur somme donne le nombre demandé.

11) b) D'après la partie 1, $p_{k,1} = 1/4 + (3/4)(-1/3)^k$ est rapidement proche de $1/4$. Sur 100 déplacements, on s'attend donc à un nombre de retours voisin de 25, avec des fluctuations aléatoires. Les cinq valeurs données, de 23 à 28, sont cohérentes avec cet ordre de grandeur.

On peut préciser ce constat par une espérance exacte, sans supposer les retours indépendants. Notons

$$N_{100} = \sum_{k=1}^{100} \mathbf{1}_{\{X_k=1\}}.$$

Les indicatrices sont bornées, donc intégrables, et la linéarité de l'espérance donne :

$$E(N_{100}) = \sum_{k=1}^{100} p_{k,1} = 25 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 25 - \frac{3}{16} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{100}\right] \simeq 24,8125.$$

Cette valeur centrale est proche des nombres observés. Les variables de retour ne sont pas indépendantes : un retour en 1 interdit un nouveau retour au déplacement immédiatement suivant. Il serait donc injustifié d'attribuer ici une loi binomiale au nombre de retours. Les simulations illustrent le résultat sans constituer une preuve probabiliste supplémentaire.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule : nature ouverte du domaine $\mathbb{R}^2$ explicitée, conformément au cadre des extrema de deux variables.
- Exercice 1, question 5) a) : Code adapté en Python ; la grille et la représentation de surface sont documentées, sans exiger la maîtrise des commandes tridimensionnelles.
- Exercice 1, question 5) b) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les trois nappes et leurs axes sont conservés à partir des tracés originaux, sans inventer les expressions des deux nappes alternatives.
- Exercice 2, question 3) : Code adapté en Python ; distinction entre puissance matricielle et puissance coefficient par coefficient, documentation de la saisie et de `matrix_power`.
- Exercice 3, question 5) a) : Code adapté en Python ; incohérence de la variable de sortie d'origine rectifiée pour renvoyer la variable Z_n effectivement calculée.

- Exercice 3, question 5) b) : Code adapté en Python ; histogrammes pondérés par le nombre total de tirages afin de conserver les proportions de classe sans renormaliser les seules valeurs positives. Les conventions de classes aux bornes sont explicitées. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées.
- Problème, question 11) a) : Code adapté en Python ; la simulation de transition par probabilités cumulées remplace la commande spécifique de l'ancien langage, avec l'algorithme fourni et documenté.