



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
- 2) a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).
- 2) b) La matrice A est-elle diagonalisable? Est-elle inversible?
- 3) Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f .
- 4) a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 4) b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
- 4) c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n , la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N , puis de I et T .
- 5) a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I.$$

5) b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A .

5) c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5) a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1) Étude de f_n .

1) a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$, puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .

1) b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

1) c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2) Étude de la suite (u_n) .

2) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2) b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

3) a) Utiliser la question 2) b) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

Dans la bibliothèque NumPy importée sous le nom `np`, les commandes `np.exp(a)` et `np.sqrt(a)` renvoient respectivement e^a et la racine carrée de $a \geq 0$. `print(n)` affiche la valeur de `n`.

Python

```
import numpy as np

n = 0

while ...:
    n = ...

print(n)
```

3) b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2, 3 comme valeur approchée de $\ln 10$.

4) On pose $v_n = u_n - n$.

4) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

4) b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a :

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

4) c) Vérifier ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

4) d) Dédurre de l'encadrement obtenu en 2) b) que $u_n - n \sim e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$ et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.

On considère également une variable aléatoire Z , indépendante de U et de V , et dont la loi est donnée par :

$$P(Z = 1) = p, \quad P(Z = -1) = 1 - p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1, \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1. \end{cases}$$

On note F_X , F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X , U et V .

1) Donner les expressions de $F_U(x)$ et de $F_V(x)$ selon les valeurs de x .

2) a) Établir, grâce au système complet d'événements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x).$$

2) b) Vérifier que X appartient presque sûrement à $[-3, 3]$ et que tout sous-intervalle ouvert non vide de $[-3, 3]$ a une probabilité strictement positive. Expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3, \quad x > 3.$$

2) c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X .

- 2) d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.
- 3) On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2, puis de les déterminer.
- 3) a) Vérifier que l'on a :
- $$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}.$$
- 3) b) Dédire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.
- 3) c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.
- 4) a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Déterminer la loi de $2T - 1$.
- 4) b) En Python, après `import numpy.random as rd`, `rd.random()` simule une loi uniforme sur $[0, 1[$ et `rd.binomial(1, p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p . Les tirages effectués par des appels distincts sont considérés indépendants. Une loi uniforme sur $[a, b]$ se simule par `a + (b-a)*rd.random()` ; le choix des bornes ouvertes ou fermées ne change pas cette loi à densité.

Écrire des commandes Python permettant de simuler U, V, Z , puis X .

Problème

Partie 1 : questions préliminaires

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1}.$$

1) b) En déduire que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

1) c) Établir par encadrement que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

1) d) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

2) Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geq m, \quad \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}.$$

3) a) Dans cette question, on suppose $x \in]0, 1[$. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes,

suivant toutes la loi géométrique de paramètre x , et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n + 1$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j]).$$

3) b) En déduire, par récurrence sur n , que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket n, +\infty \rrbracket, \quad P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$

3) c) En déduire, pour tout x de $]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

3) d) En Python, la commande `rd.geometric(a, size=n)`, après `import numpy.random as rd`, simule un tableau de n variables indépendantes de loi géométrique de paramètre $a \in]0, 1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Après `import numpy as np, np.sum(T)` renvoie la somme des éléments du tableau T . `input(...)` lit une chaîne saisie au clavier et `int(...)` la convertit en entier.

Compléter les commandes Python suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n de paramètre x :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez une valeur de n supérieure ou égale à 1 : '))

S = ...

print(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = -\frac{q^k}{k \ln p}.$$

- 1) a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.
- 1) b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.$$

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = u_k.$$

- 2) a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.
- 2) b) Montrer également que X possède une variance et vérifier :

$$V(X) = -\frac{q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}.$$

- 3) a) Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p .

Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

$$P(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p}.$$

- 3) b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\binom{k}{n}/k = \binom{k-1}{n-1}/n$ (les coefficients binomiaux sont pris nuls lorsque l'indice inférieur dépasse l'indice supérieur), établir que, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}.$$

En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

$$P(Y = n) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln p}.$$

- 3) c) Vérifier que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1.$$

- 3) d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et de q .

- 3) e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :

$$V(Y) = -\frac{q(q + (1+q) \ln p)}{(\ln p)^2}.$$