



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EDHEC**

Mathématiques — Option économique

**2016**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

Annales de concours · Corrigé

## Exercice 1

---

1) Un calcul matriciel direct donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad 4A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $A^2 - 4A = -4I$  et  $A^2 - 4A + 4I = 0$ . Le polynôme  $Q(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$  est donc un polynôme annulateur de degré 2.

2) a) Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $v \neq 0$  un vecteur propre associé, alors

$$Q(A)v = Q(\lambda)v = 0. \text{ Par conséquent } (\lambda - 2)^2 = 0, \text{ donc } \lambda = 2.$$

Il faut aussi vérifier que 2 est effectivement valeur propre :  ${}^t(A(1, 1, 0)) = 2{}^t(1, 1, 0)$  avec  $(1, 1, 0) \neq 0$ . La seule valeur propre de  $A$ , et donc de  $f$ , est 2.

2) b) Si  $A$  était diagonalisable, une matrice diagonale semblable à  $A$  aurait tous ses coefficients diagonaux égaux à 2, donc serait  $2I$ . Il s'ensuivrait  $A = P(2I)P^{-1} = 2I$ , contrairement aux coefficients de  $A$ . Ainsi  $A$  n'est pas diagonalisable.

En revanche, 0 n'est pas valeur propre :  $\text{Ker } A = \{0\}$  et  $A$  est inversible. On peut également le voir directement par  $A(4I - A) = 4I$ , d'où  $A(I - A/4) = I$ ; cette seconde justification prépare le calcul de l'inverse en 5) b).

3) Pour déterminer les vecteurs propres associés à 2, on résout un système à coefficients

numériques :

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a - b + c = 0,$$

car les trois lignes de  $A - 2I$  sont respectivement  $(1, -1, 1)$ ,  $2(1, -1, 1)$  et  $(1, -1, 1)$ . Ainsi  $b = a + c$  et :

$$E_2(f) = \{(a, a + c, c) : a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)).$$

On choisit  $u_1 = (1, 1, 0)$  et  $u_2 = (0, 1, 1)$ . Si  $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ , les première et troisième coordonnées donnent  $\alpha = \beta = 0$ . La famille  $(u_1, u_2)$  est donc une base de cet espace propre.

4) a) On a  $u_3 = (1, 1, 1)$ . Pour vérifier la liberté, supposons  $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ . Les coordonnées donnent :

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0.$$

Les première et troisième relations donnent  $\alpha = \beta = -\gamma$ , puis la deuxième impose  $\gamma = 0$ . Tous les coefficients sont nuls. Cette famille libre de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est donc une base.

4) b) Les deux premiers vecteurs sont propres :  $f(u_1) = 2u_1$  et  $f(u_2) = 2u_2$ . Pour le troisième :

$$f(u_3) = (3, 4, 3) = u_1 + u_2 + 2u_3.$$

Les colonnes des coordonnées de ces trois images donnent :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, de diagonale  $(2, 2, 2)$ .

4) c) On pose  $N = T - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La multiplication donne  $N^2 = 0$ . Les matrices

$2I$  et  $N$  commutent, car  $I$  commute avec toute matrice. Pour  $n \geq 1$ , le binôme matriciel se réduit donc aux deux premiers termes :

$$T^n = (2I + N)^n = 2^n I + n2^{n-1}N.$$

Pour  $n = 0$ , le membre de droite vaut aussi  $I$  puisque le coefficient de  $N$  est nul. En remplaçant  $N$  par  $T - 2I$ , il vient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T^n = n2^{n-1}T + (1 - n)2^n I.$$

#### 5) a) Méthode 1 — Changement de base

La matrice de passage  $P$  a pour colonnes  $u_1, u_2, u_3$  dans la base canonique. Elle est inversible puisque ces vecteurs forment une base, et  $A = PTP^{-1}$ . Par produit,  $A^n = PT^nP^{-1}$ , y compris pour  $n = 0$ . La formule précédente donne :

$$A^n = P(n2^{n-1}T - (n - 1)2^n I)P^{-1} = n2^{n-1}A - (n - 1)2^n I.$$

Cette méthode utilise directement la forme triangulaire construite dans l'énoncé.

## Méthode 2 — Calcul direct avec $A - 2I$

La question 1) donne  $(A - 2I)^2 = 0$ . En posant  $B = A - 2I$ , on a  $A = 2I + B$  et  $2I$  commute avec  $B$ . Pour  $n \geq 1$ , le binôme donne  $A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$ , car tous les termes contenant  $B^j$  avec  $j \geq 2$  sont nuls. Le résultat est également vrai pour  $n = 0$ . En remplaçant  $B$  par  $A - 2I$ , on retrouve la même formule. Cette approche permet de calculer les puissances sans construire de nouvelle base.

- 5) b) L'identité  $A^2 - 4A + 4I = 0$  se réécrit  $A(4I - A) = 4I$ . En divisant par 4, on obtient  $A(I - A/4) = I$ , ce qui justifie à nouveau l'inversibilité et donne :

$$A^{-1} = I - \frac{1}{4}A.$$

- 5) c) En substituant  $n = -1$  dans l'expression proposée, on obtient :

$$(-1)2^{-2}A - (-2)2^{-1}I = -\frac{1}{4}A + I = A^{-1}.$$

L'égalité reste donc vraie pour  $n = -1$  ; elle n'est pas déduite de la seule formule initialement établie pour les entiers naturels, mais vérifiée avec l'inverse calculé séparément.

## Exercice 2

- 1) a) La fonction  $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc sur  $[n, +\infty[$ . Le théorème fondamental de l'intégration assure que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur cet intervalle et que :

$$f'_n(x) = e^{\sqrt{x}} > 0.$$

Au bord  $x = n$ , la dérivée est entendue à droite. La continuité de l'intégrande suffit, y compris lorsque  $n = 0$  : on ne dérive pas  $\sqrt{t}$  dans cette question. Ainsi  $f_n$  est strictement croissante sur  $[n, +\infty[$ .

- 1) b) Pour  $t \in [n, x]$ , on a  $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$ . Par positivité de l'intégrale :

$$f_n(x) \geq (x - n)e^{\sqrt{n}}.$$

Le facteur  $e^{\sqrt{n}}$  est une constante strictement positive lorsque  $n$  est fixé ; le membre de droite tend vers  $+\infty$  avec  $x$ . Il en est donc de même de  $f_n(x)$ .

- 1) c) La fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $[n, +\infty[$ . Elle vérifie  $f_n(n) = 0$  et tend vers  $+\infty$ . Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un  $u_n$  tel que  $f_n(u_n) = 1$ , et la stricte croissance donne son unicité. Comme  $f_n(n) = 0 \neq 1$ , on a même  $u_n > n$ .
- 2) a) L'inégalité  $u_n > n$  est valable pour tout entier naturel  $n$ . Pour tout réel  $M$ , dès que  $n > M$ , elle entraîne  $u_n > M$ . Ainsi  $u_n \rightarrow +\infty$ .
- 2) b) Sur  $[n, u_n]$ , la croissance de  $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$  donne  $e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}$ . En intégrant, puis en utilisant  $f_n(u_n) = 1$ , on obtient :

$$(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq 1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$

Les exponentielles sont strictement positives ; on peut donc diviser et conclure :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

- 3) a) Code adapté en Python. La notation non encore définie dans la question source est remplacée dans le sujet par  $u_n - n$  ; cela ne modifie pas la quantité à majorer.

Il suffit d'obtenir  $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ , puisque cette quantité majore  $u_n - n$ . On augmente donc  $n$  tant que cette borne est trop grande :

### Python

```
import numpy as np

n = 0

while np.exp(-np.sqrt(n)) > 1e-4:
    n = n + 1

print(n)
```

La variable  $n$  est un entier, initialement nul. La boucle se termine car  $e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0$ . À sa sortie, le résultat de 2) b) garantit  $u_n - n \leq 10^{-4}$ . Ce code a été exécuté et affiche 85. Il

cherche le premier entier satisfaisant la condition suffisante sur la borne, sans prétendre trouver le premier entier qui satisfait directement la condition sur  $u_n - n$ .

3) b) Par stricte croissance du logarithme :

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \iff \sqrt{n} \geq 4 \ln 10 \iff n \geq 16(\ln 10)^2.$$

Avec  $\ln 10 \simeq 2,3$ , le seuil vaut environ  $16 \times 2,3^2 = 84,64$ . Parmi les valeurs proposées, la boucle affiche donc  $n = 85$ , ce qui concorde avec son exécution.

4) a) On a  $0 < v_n = u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$  par 2) b). Le majorant tend vers 0, donc le théorème d'encadrement donne  $v_n \rightarrow 0$ .

4) b) Méthode 1 — Comparaison des carrés

Si  $x \geq -1$ , alors  $1 + x/2 \geq 1/2 > 0$  et  $\sqrt{1+x} \geq 0$ . Or :

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (1+x) = \frac{x^2}{4} \geq 0.$$

La comparaison des carrés de deux réels positifs donne donc  $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ , y compris en  $x = -1$ .

## Méthode 2 — Étude d'une fonction

Sur  $] -1, +\infty[$ , posons  $h(x) = 1 + x/2 - \sqrt{1+x}$ . Sa dérivée est  $h'(x) = 1/2 - 1/(2\sqrt{1+x})$ . Elle est négative sur  $] -1, 0[$ , nulle en 0 et positive sur  $]0, +\infty[$ . Ainsi  $h$  atteint son minimum en 0, où  $h(0) = 0$ . Par continuité en  $-1$ , on a aussi  $h(-1) = 1/2 \geq 0$ . D'où la même inégalité sur  $[-1, +\infty[$ . La première méthode évite la dérivation au bord ; la seconde illustre une preuve d'inégalité par minimum global.

4) c) Pour  $n \geq 1$ , on a  $u_n = n + v_n$  et  $v_n/n \geq 0$ . L'inégalité précédente appliquée à  $x = v_n/n$  donne :

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}.$$

En changeant les signes, puis en appliquant la fonction exponentielle croissante, on obtient :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \geq \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

4) d) Pour  $n \geq 1$ , les questions 2) b) et 4) c) donnent, après division par  $e^{-\sqrt{n}} > 0$  :

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$

Comme  $v_n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ , le quotient  $v_n/(2\sqrt{n})$  tend vers 0. La continuité de l'exponentielle en 0 donne la limite 1 du minorant. Le quotient central tend donc vers 1, soit  $u_n - n \sim e^{-\sqrt{n}}$ . On a utilisé une continuité sur une différence tendant vers zéro, sans composer abusivement une équivalence avec l'exponentielle.

### Exercice 3

1) Pour une loi uniforme sur  $[a, b]$ , la fonction de répartition est nulle sous  $a$ , vaut  $(x - a)/(b - a)$  entre  $a$  et  $b$ , et vaut 1 au-dessus de  $b$ . Les intervalles ont ici tous deux longueur 4. Donc :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < -3, \\ (x + 3)/4 & -3 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1, \end{cases} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ (x + 1)/4 & -1 \leq x \leq 3, \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

Les formules se raccordent aux bornes et définissent des fonctions continues.

2) a) Les événements  $[Z = 1]$  et  $[Z = -1]$  sont disjoints, de réunion  $\Omega$  et de probabilités respectivement  $p > 0$  et  $1 - p > 0$ . La formule des probabilités totales, la définition de  $X$  sur chaque événement, puis l'indépendance de  $U$  et  $Z$  et de  $V$  et  $Z$  donnent :

$$P(X \leq x) = P(U \leq x, Z = 1) + P(V \leq x, Z = -1) = pP(U \leq x) + (1 - p)P(V \leq x).$$

Par conséquent  $F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)$  pour tout réel  $x$ .

- 2) b) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé précise l'intervalle support en termes de probabilités. Les lois ne déterminent pas l'image exacte d'une variable sur les événements de probabilité nulle.

Les variables  $U$  et  $V$  appartiennent presque sûrement à  $[-3, 1]$  et à  $[-1, 3]$ ; la définition par choix impose donc  $P(-3 \leq X \leq 3) = 1$ . En remplaçant les fonctions de répartition par les expressions de 1), on obtient :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -3, \\ \frac{p(x+3)}{x+1+2p} & -3 \leq x \leq -1, \\ \frac{4}{x+1+2p} & -1 \leq x \leq 1, \\ p + \frac{(1-p)(x+1)}{4} & 1 \leq x \leq 3, \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

Les deux expressions voisines donnent les mêmes valeurs aux raccords : 0 en  $-3$ ,  $p/2$  en  $-1$ ,  $(1+p)/2$  en 1 et 1 en 3. Les pentes sur les trois intervalles ouverts sont  $p/4$ ,  $1/4$  et  $(1-p)/4$ , toutes strictement positives. Ainsi  $F_X$  est strictement croissante sur  $[-3, 3]$ . Pour  $-3 \leq a < b \leq 3$ , la continuité de  $F_X$  donne  $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) > 0$ . Cela établit l'affirmation demandée sur tout sous-intervalle ouvert non vide et identifie bien l'intervalle support  $[-3, 3]$ .

- 2) c) La fonction  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  en dehors des quatre points  $-3, -1, 1, 3$ . En la dérivant sur les intervalles ouverts, et en choisissant la valeur nulle aux points de raccord, on obtient une densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} p/4 & -3 < x < -1, \\ 1/4 & -1 < x < 1, \\ (1-p)/4 & 1 < x < 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive et son intégrale vaut  $p/2 + 1/2 + (1-p)/2 = 1$ . Toutes ses limites latérales sont finies, conformément au cadre des densités du programme.

- 2) d) La densité est bornée et nulle hors d'un segment. Les intégrales de  $|x|f_X(x)$  et  $x^2 f_X(x)$  sont donc finies ; l'espérance et le moment d'ordre 2 existent. On calcule :

$$E(X) = \frac{p}{4} \int_{-3}^{-1} x \, dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 x \, dx + \frac{1-p}{4} \int_1^3 x \, dx = -p + 0 + (1-p) = 1 - 2p.$$

Pour le second moment :

$$E(X^2) = \frac{p}{4} \times \frac{26}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1-p}{4} \times \frac{26}{3} = \frac{26+2}{12} = \frac{7}{3}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne enfin :

$$V(X) = \frac{7}{3} - (1 - 2p)^2 = \frac{4}{3} + 4p(1 - p).$$

Cette variance est strictement positive pour  $p \in ]0, 1[$ .

- 3) a) Si  $Z = 1$ , les coefficients  $(1 + Z)/2$  et  $(1 - Z)/2$  valent respectivement 1 et 0, donc le membre de droite vaut  $U = X$ . Si  $Z = -1$ , ils valent 0 et 1, donc il vaut  $V = X$ . Ces deux cas couvrent toutes les issues ; l'égalité est établie.

- 3) b) Les variables  $U$  et  $V$  sont bornées presque sûrement ; leurs produits par les indicatrices  $(1 + Z)/2$  et  $(1 - Z)/2$  ont donc une espérance. La linéarité, puis l'indépendance des facteurs dans chacun des produits, donnent :

$$E(X) = E(U) \frac{1 + E(Z)}{2} + E(V) \frac{1 - E(Z)}{2}.$$

Or  $E(U) = (-3 + 1)/2 = -1$ ,  $E(V) = (-1 + 3)/2 = 1$  et  $E(Z) = p - (1 - p) = 2p - 1$ .

Ainsi :

$$E(X) = -p + (1 - p) = 1 - 2p.$$

Cette méthode exploite le mécanisme de sélection au lieu de recalculer la densité.

- 3) c) Posons  $I_+ = (1 + Z)/2$  et  $I_- = (1 - Z)/2$ . Ces variables vérifient  $I_+^2 = I_+$ ,  $I_-^2 = I_-$  et  $I_+ I_- = 0$ . En élevant l'identité de 3) a) au carré, on obtient donc  $X^2 = U^2 I_+ + V^2 I_-$ . Tous les termes sont bornés presque sûrement et ont une espérance. L'indépendance donne :

$$E(X^2) = pE(U^2) + (1 - p)E(V^2).$$

Les lois uniformes ont chacune variance  $4^2/12 = 4/3$ , et leurs espérances sont opposées, de carré 1. Ainsi  $E(U^2) = E(V^2) = 4/3 + 1 = 7/3$ . On retrouve  $E(X^2) = 7/3$ .

- 4) a) Une variable de Bernoulli  $T$  vaut 1 avec probabilité  $p$  et 0 avec probabilité  $1 - p$ . Ainsi  $2T - 1$  vaut 1 avec probabilité  $p$  et  $-1$  avec probabilité  $1 - p$ . Elle suit exactement la loi de  $Z$ .
- 4) b) Code adapté en Python. Le paramètre  $p$  est celui de l'énoncé, fixé dans  $]0, 1[$ . On utilise deux uniformes indépendantes pour les transformations affines, puis une Bernoulli indépendante pour la sélection :

### Python

```
import numpy.random as rd

U = -3 + 4*rd.random()
V = -1 + 4*rd.random()
T = rd.binomial(1, p)
Z = 2*T - 1
X = U*(1+Z)/2 + V*(1-Z)/2
```

Les variables  $U$ ,  $V$  et  $Z$  ont les lois demandées, et la dernière ligne choisit  $U$  si  $Z == 1$ ,  $V$  sinon. Le code a été exécuté pour plusieurs valeurs de  $p$  et les deux branches de sélection ont été contrôlées. Les simulations concordent avec les moments calculés, sans constituer une démonstration de ces moments.

## Problème

### Partie 1 : questions préliminaires

1) a) Pour  $t \in [0, x]$  avec  $x < 1$ , on a  $t \neq 1$ . La somme géométrique finie donne :

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1 - t^n}{1 - t}.$$

La formule vaut aussi pour  $t = 0$ , puisque le premier terme est  $t^0 = 1$ .

1) b) Les fonctions sont continues sur le segment  $[0, x]$ . On intègre l'identité de 1) a) et on utilise la linéarité d'une somme finie :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt = \int_0^x \frac{dt}{1 - t} - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

La primitive de  $1/(1 - t)$  est  $-\ln(1 - t)$ , ce qui donne bien l'identité demandée. Pour  $x = 0$ , les deux membres sont nuls.

1) c) Pour  $0 \leq t \leq x < 1$ , on a  $0 \leq 1/(1 - t) \leq 1/(1 - x)$ . Par intégration :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \leq \frac{1}{1 - x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 - x)}.$$

Lorsque  $0 < x < 1$ , le majorant tend vers 0, puisque  $x^{n+1} \rightarrow 0$  et  $1/(n + 1) \leq 1$ . Lorsque  $x = 0$ , l'intégrale est identiquement nulle. Dans tous les cas, l'encadrement donne la limite 0.

1) d) La question 1) b) exprime les sommes partielles de la série. Le terme intégral tend vers 0 d'après 1) c), donc ces sommes partielles convergent vers  $-\ln(1 - x)$ . Par

définition de la somme d'une série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad x \in [0, 1[.$$

La démonstration ne nécessite aucune théorie générale des séries de fonctions.

## 2) Méthode 1 — Récurrence sur $q$

Pour  $q = m$ , le membre de gauche vaut  $\binom{m}{m} = 1$  et le membre de droite vaut  $\binom{m+1}{m+1} = 1$ .  
Supposons la formule établie pour un entier  $q \geq m$ . Alors, par l'hypothèse de récurrence et la relation de Pascal :

$$\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout entier  $q \geq m$ , y compris lorsque  $m = 0$ .

## Méthode 2 — Somme télescopique

---

La relation de Pascal s'écrit  $\binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$ , avec la convention  $\binom{m}{m+1} = 0$ . En sommant de  $k = m$  à  $q$ , les termes intermédiaires se compensent :

$$\sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} = \binom{q+1}{m+1}.$$

La récurrence est utile pour établir progressivement l'identité ; la seconde écriture fait apparaître le télescopage qui simplifiera la somme dans la question suivante.

- 3) a) Question adaptée au programme actuel : la restriction  $x \in ]0, 1[$  rend valide la loi géométrique introduite ici ; le cas  $x = 0$  demeure permis dans les questions précédentes, mais ne définit pas une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$ .

Chaque  $X_i$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , donc  $S_n \geq n$ . Réciproquement, pour tout entier  $k \geq n$ , l'événement  $[X_1 = k - n + 1] \cap \bigcap_{i=2}^n [X_i = 1]$  a une probabilité strictement positive par indépendance et parce que  $0 < x < 1$ . Ainsi :

$$S_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket.$$

Fixons  $k \geq n + 1$ . Comme  $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$  et  $X_{n+1} \geq 1$ , l'événement  $[S_{n+1} = k]$  est la réunion disjointe, pour  $j = n, \dots, k - 1$ , des événements  $[S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j]$ . L'additivité sur cette réunion finie donne exactement la formule demandée.

- 3) b) Pour  $n = 1$ , la formule annoncée est celle de la loi géométrique :

$$P(S_1 = k) = x(1 - x)^{k-1}, \text{ puisque } \binom{k-1}{0} = 1.$$

Supposons la formule vraie pour  $n \geq 1$ . Les variables  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  sont mutuellement indépendantes ; le lemme des coalitions montre que leur somme partielle  $S_n$  est indépendante de  $X_{n+1}$ . Pour  $k \geq n + 1$ , la formule de 3) a) devient :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n (1-x)^{j-n} x(1-x)^{k-j-1}.$$

On regroupe les facteurs indépendants de  $j$  :

$$P(S_{n+1} = k) = x^{n+1} (1-x)^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}.$$

Avec  $\ell = j - 1$ , la somme vaut

$$\sum_{\ell=n-1}^{k-2} \binom{\ell}{n-1} = \binom{k-1}{n}$$

d'après 2). C'est la formule annoncée au rang  $n + 1$ . La récurrence prouve donc la loi de  $S_n$  pour tout  $n \geq 1$ ; les probabilités sont nulles pour  $k < n$ .

- 3) c) Les événements  $[S_n = k]$  pour  $k \geq n$  forment un système complet. La somme de leurs probabilités vaut 1, donc :

$$x^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = 1.$$

Puisque  $x > 0$ , la division par  $x^n$  donne la somme  $1/x^n$ . La convergence de la série positive est ainsi justifiée par la normalisation d'une loi, sans dériver une série terme à terme.

- 3) d) Code adapté en Python. Le paramètre  $x$  est fixé dans  $]0, 1[$ , comme dans la question 3) a). On simule les  $n$  variables géométriques indépendantes, puis on les additionne :

### Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez une valeur de n supérieure ou égale à 1 : '))

S = np.sum(rd.geometric(x, size=n))

print(S)
```

Le tableau contient des entiers supérieurs ou égaux à 1;  $S$  est donc un entier supérieur ou égal à  $n$ . Le code a été exécuté pour plusieurs couples  $(n, x)$ ; son comportement et ses premières probabilités ont été contrôlés. Une simulation illustre la loi établie en 3) b) et ne remplace pas la preuve.

## Partie 2 : étude d'une variable aléatoire

1) a) On a  $0 < p < 1$ , donc  $\ln p < 0$  et  $0 < q = 1 - p < 1$ . Pour chaque  $k \geq 1$ ,  $q^k > 0$  et  $k > 0$ . Par conséquent  $u_k = -q^k / (k \ln p) > 0$ .

1) b) Le résultat de la partie 1, question 1) d), s'applique à  $q \in ]0, 1[$  :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1 - q) = -\ln p.$$

En multipliant cette série convergente par  $-1 / \ln p$ , on obtient

$$\sum_{k \geq 1} u_k = 1.$$

Les nombres  $u_k$  définissent donc bien une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

2) a) La variable  $X$  est positive. L'existence de son espérance équivaut à la convergence de la série positive de terme  $kP(X = k)$ . Or la série géométrique donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln p} \frac{q}{1 - q} = -\frac{q}{p \ln p}.$$

Cette quantité est finie et positive. Ainsi  $X$  possède une espérance et  $E(X) = -q / (p \ln p)$ .

2) b) Pour justifier la variance, on calcule d'abord le second moment. La série géométrique dérivée usuelle converge pour  $|q| < 1$  et donne

$$\sum_{k \geq 1} kq^k = q / (1 - q)^2.$$

Ainsi :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} k q^k = -\frac{q}{p^2 \ln p}.$$

La somme positive est finie, donc  $X$  possède une variance. Par Koenig-Huygens :

$$V(X) = -\frac{q}{p^2 \ln p} - \frac{q^2}{p^2 (\ln p)^2} = -\frac{q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}.$$

Le signe est cohérent : l'inégalité stricte  $\ln p < p - 1 = -q$ , valable pour  $0 < p < 1$ , rend  $q + \ln p < 0$  ; le résultat est positif.

- 3) a) Pour tout  $k \geq 1$ ,  $P(X = k) > 0$  : la loi conditionnelle donnée est donc bien définie. Elle impose  $Y \in \{0, \dots, k\}$  lorsque  $X = k$ , donc  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , l'événement  $[X = 1, Y = 0]$  a probabilité  $P(X = 1)q > 0$ . Pour  $n \geq 1$ , l'événement  $[X = n, Y = n]$  a probabilité  $P(X = n)p^n > 0$ . Chaque entier naturel est donc une valeur possible :  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ .

La formule des probabilités totales selon les événements  $[X = k]$  donne :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = 0 \mid X = k) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{2k}}{k}.$$

La série logarithmique de la partie 1 s'applique à  $q^2 \in ]0, 1[$  et donne :

$$P(Y = 0) = \frac{\ln(1 - q^2)}{\ln p} = \frac{\ln(p(1 + q))}{\ln p} = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p}.$$

Tous les logarithmes portent sur des nombres strictement positifs. De plus  $p < 1 - q^2 < 1$ , ce qui montre directement que cette probabilité est comprise strictement entre 0 et 1.

3) b) Lorsque  $1 \leq n \leq k$ , les factorielles donnent :

$$\frac{1}{k} \binom{k}{n} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!} = \frac{1}{n} \binom{k-1}{n-1}.$$

Lorsque  $n > k$ , les deux coefficients sont nuls suivant la convention du sujet ; l'égalité demeure donc vraie pour tous  $k, n \geq 1$ .

Fixons  $n \geq 1$ . Les lois conditionnelles binomiales donnent une probabilité nulle pour  $k < n$ . La formule des probabilités totales, puis l'identité précédente, entraînent :

$$P(Y = n) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^k}{k} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} = -\frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}.$$

Dans la somme de la partie 1, question 3) c), on prend le paramètre

$a = 1 - q^2 = p(1 + q)$ . Il vérifie  $0 < a < 1$ , et  $1 - a = q^2$ . La somme obtenue vaut donc  $a^{-n} = [p(1 + q)]^{-n}$ . En substituant, puis en simplifiant le facteur  $p^n$  non nul :

$$P(Y = n) = -\frac{q^n}{n(1 + q)^n \ln p}.$$

3) c) Posons  $r = q/(1 + q)$  ; on a  $0 < r < 1$ , et  $1 - r = 1/(1 + q)$ . Pour  $n \geq 1$ , la formule précédente s'écrit  $P(Y = n) = -r^n/(n \ln p)$ . La série logarithmique donne alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = \frac{\ln(1 - r)}{\ln p} = -\frac{\ln(1 + q)}{\ln p}.$$

En ajoutant la masse  $P(Y = 0) = 1 + \ln(1 + q)/\ln p$ , on obtient bien une somme totale égale à 1.

3) d) Méthode 1 — Série calculée à partir de la loi de  $Y$

La variable  $Y$  est positive. Avec  $0 < r < 1$ , sa série de premier moment converge et vaut :

$$E(Y) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{n=1}^{+\infty} n r^n = -\frac{1}{\ln p} \frac{r}{1 - r} = -\frac{q}{\ln p}.$$

La convergence de cette série positive établit l'existence de l'espérance.

## Méthode 2 — Somme explicite sur la loi jointe

Dans le cadre des couples discrets du programme, les termes positifs permettent de regrouper les sommes selon la valeur de  $X$  :

$$\sum_{n \geq 0} n P(Y = n) = \sum_{k \geq 1} P(X = k) \sum_{n=0}^k n \binom{k}{n} p^n q^{k-n}.$$

La somme intérieure est l'espérance d'une loi binomiale de paramètres  $k, p$ , donc vaut  $kp$ . La somme extérieure vaut donc  $pE(X)$  et est finie d'après 2) a). Ainsi  $E(Y) = pE(X) = -q/\ln p$ . Cette preuve exploite les moments binomiaux conditionnels par des sommes explicites, sans faire appel à un théorème général d'espérance conditionnelle.

### 3) e) Méthode 1 — Second moment par la loi marginale

La série du second moment est positive et, avec  $r = q/(1+q) \in ]0, 1[$ , converge grâce à la série géométrique dérivée :

$$E(Y^2) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{n=1}^{+\infty} n r^n = -\frac{1}{\ln p} \frac{r}{(1-r)^2} = -\frac{q(1+q)}{\ln p}.$$

La variance existe donc et la formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(Y) = -\frac{q(1+q)}{\ln p} - \frac{q^2}{(\ln p)^2} = -\frac{q(q + (1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}.$$

## Méthode 2 — Second moment par les sommes binomiales

---

On regroupe à nouveau les termes positifs du couple discret :

$$\sum_{n \geq 0} n^2 P(Y = n) = \sum_{k \geq 1} P(X = k) \sum_{n=0}^k n^2 \binom{k}{n} p^n q^{k-n}.$$

Une loi binomiale de paramètres  $k, p$  a variance  $kpq$  et espérance  $kp$ , donc son second moment vaut  $kpq + k^2 p^2$ . La dernière somme vaut ainsi  $pqE(X) + p^2E(X^2)$ , quantité finie d'après 2) a) et 2) b). En substituant les moments de  $X$  :

$$E(Y^2) = pq \left( -\frac{q}{p \ln p} \right) + p^2 \left( -\frac{q}{p^2 \ln p} \right) = -\frac{q^2 + q}{\ln p}.$$

En retranchant  $E(Y)^2 = q^2/(\ln p)^2$ , on retrouve la même variance. La première méthode emploie la loi marginale déjà calculée ; la seconde reste applicable lorsque la loi marginale se simplifie difficilement mais que les lois conditionnelles sont usuelles.

## Relevé des adaptations

---

- Exercice 2, question 3) a) : Code adapté en Python. La quantité  $v_n$ , utilisée avant sa définition dans le document source, est désignée par  $u_n - n$  à cet endroit ; la définition de 4) est conservée. Les fonctions NumPy et l'affichage sont documentés.
- Exercice 3, question 2) b) : Question adaptée au programme actuel. L'affirmation sur l'image exacte  $X(\Omega)$  est formulée comme une propriété probabiliste de l'intervalle support  $[-3, 3]$ , car les lois ne fixent pas les valeurs sur les événements de probabilité nulle. La fonction de répartition et toutes les données utiles sont conservées.
- Exercice 3, question 4) b) : Code adapté en Python. Les lois uniformes sont simulées par transformation affine de `rd.random()` ; la Bernoulli, l'indépendance des appels et les sorties sont documentées.

- Problème, partie 1, question 3) a) : Question adaptée au programme actuel. Le paramètre  $x$  est restreint à  $]0, 1[$  pour définir une loi géométrique ; les questions 1) et 2) restent inchangées et permettent  $x = 0$  lorsqu'il intervient.
- Problème, partie 1, question 3) d) : Code adapté en Python. Le paramètre de simulation est  $x$ , celui des variables  $X_k$ , et les commandes géométrique, somme et saisie sont documentées.
- Problème, partie 2, question 3) b) : la convention de nullité des coefficients binomiaux pour un indice inférieur trop grand est explicitée ; l'identité donnée pour tous  $k, n \geq 1$  est ainsi définie sans ambiguïté.