



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2015

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) a) Posons $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$. La lecture des colonnes de C donne

$f(e_1) = u + v$ et $f(e_j) = v$ pour $2 \leq j \leq 5$. Ainsi

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(u + v, v) = \text{Vect}(u, v)$. Si $\alpha u + \beta v = 0$, la première coordonnée donne $\beta = 0$, puis la deuxième donne $\alpha = 0$. La famille (u, v) est donc libre et génératrice de l'image : c'est une base de $\text{Im}(f)$, de dimension 2.

1) b) Le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$, donne

$$\dim \text{Ker}(f) = 5 - 2 = 3.$$

Pour

$$w = \sum_{j=1}^5 x_j e_j,$$

on a $f(w) = x_1 u + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)v$. L'indépendance de u et v montre que w appartient au noyau si et seulement si $x_1 = 0$ et $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Donc :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_2 - e_5, e_3 - e_5, e_4 - e_5).$$

Les coordonnées d'indices 2, 3 et 4 prouvent que ces trois vecteurs sont libres. Ils forment bien une base du noyau.

2) a) Par linéarité et lecture des colonnes :

$$f(u) = 3e_1 + 3e_5 = 3v, \quad f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5 = u + 2v.$$

Il vient :

$$f(u - v) = -u + v = -(u - v), \quad f(u + 3v) = 3u + 9v = 3(u + 3v).$$

2) b) Les vecteurs non nuls $u - v$ et $u + 3v$ sont propres, de valeurs propres respectives -1 et 3 . Le noyau de dimension 3 fournit la valeur propre 0 et son espace propre $E_0 = \text{Ker}(f)$.

Les trois vecteurs de la base de E_0 , puis $u - v$ et $u + 3v$, forment une famille libre : une concaténation de familles libres d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Cette famille compte 5 vecteurs dans $\mathbb{R}^5$; c'est une base. Elle ne laisse aucune dimension supplémentaire à un autre espace propre. Par conséquent :

$$\text{Sp}(f) = \{0, -1, 3\}, \quad E_{-1} = \text{Vect}(u - v), \quad E_3 = \text{Vect}(u + 3v).$$

- 2) c) La base propre obtenue établit la diagonalisation. Prenons ses vecteurs dans l'ordre précédent :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice R est inversible parce que ses colonnes forment une base. Chaque colonne vérifie la relation propre correspondante, d'où $CR = RD$ puis $C = RDR^{-1}$.

- 3) a) Les matrices D , $D + I$ et $D - 3I$ sont diagonales. Leur produit est diagonal et chaque coefficient diagonal est de la forme $d(d + 1)(d - 3)$, avec $d \in \{0, -1, 3\}$; il est donc nul. Ainsi $D(D + I)(D - 3I) = 0$.

- 3) b) Les égalités $C = RDR^{-1}$ et $C^j = RD^jR^{-1}$, obtenues par simplification des produits, donnent :

$$P(C) = C^3 - 2C^2 - 3C = R(D^3 - 2D^2 - 3D)R^{-1} = 0.$$

Le polynôme P est donc annulateur de C . Ce calcul repose sur la diagonalisation déjà établie.

- 4) a) Les racines de $P(X) = X(X+1)(X-3)$ sont 0, -1 et 3. L'identité admise, évaluée en ces trois nombres, fournit, puisque $n \geq 1$:

$$c_n = 0, \quad a_n - b_n = (-1)^n, \quad 9a_n + 3b_n = 3^n.$$

En remplaçant b_n par $a_n - (-1)^n$, on obtient $12a_n = 3^n + 3(-1)^n$. Ainsi :

$$a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}, \quad b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}, \quad c_n = 0.$$

- 4) b) On évalue l'identité polynomiale en C . Les produits de polynômes en une même matrice se calculent comme les produits usuels, car les puissances de C commutent. Puisque $P(C) = 0$, il vient :

$$\forall n \geq 1, \quad C^n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}C.$$

Pour $n = 1$, les coefficients sont respectivement 0 et 1 ; pour $n = 2$, ils sont 1 et 0, ce qui contrôle les deux premiers cas.

- 5) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les trois lignes centrales comportent une première colonne de 1 et quatre colonnes de 0. Les deux blocs manquants ont donc pour dimensions $(3, 1)$ et $(3, 4)$:

Python

```
import numpy as np

C = np.block([[np.ones((1, 5))],
               [np.ones((3, 1)), np.zeros((3, 4))],
               [np.ones((1, 5))]])
```

L'assemblage donne un tableau de 5 lignes et 5 colonnes égal à la matrice demandée. Ce code a été exécuté et ses coefficients ont été contrôlés.

Exercice 2

- 1) a) Pour $x < 0$, la positivité de X et Y entraîne $F_U(x) = 0$; pour $x \geq 1$, on a $F_U(x) = 1$.
Si $0 \leq x \leq 1$, l'événement $[U > x]$ est $[X > x] \cap [Y > x]$. Par indépendance et par la loi uniforme :

$$P(U > x) = (1 - x)^2.$$

Donc $F_U(x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$ sur $[0, 1]$, ce qui donne exactement la fonction annoncée, y compris aux bornes.

- 1) b) La fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$: ses trois expressions coïncident en 0 et en 1.
Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Par la caractérisation des variables à densité, U est à densité. Une densité est :

$$f_U(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est positive, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut $[2x - x^2]_0^1 = 1$. Les valeurs de la densité aux deux bornes sont sans influence sur la loi.

- 1) c) La variable U est bornée entre 0 et 1 ; ses moments d'ordres 1 et 2 existent. Avec la densité précédente et le théorème de transfert :

$$E(U) = 2 \int_0^1 x(1 - x) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

$$E(U^2) = 2 \int_0^1 x^2(1 - x) dx = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$V(U) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

- 2) a) Le client C attend le départ du premier client servi, pendant U heures, puis reste au guichet pendant Z heures. Le changement de personne étant instantané :
 $T = U + Z$.

- 2) b) La variable U est une fonction de (X, Y) , et Z est indépendante de ce couple : le lemme des coalitions assure l'indépendance de U et Z . Ces variables sont bornées, donc leurs espérances et variances existent. Pour Z uniforme sur $[0, 1]$, $E(Z) = 1/2$ et $V(Z) = 1/12$. Par linéarité de l'espérance et additivité des variances des variables indépendantes :

$$E(T) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \quad V(T) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}.$$

- 3) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les minima et maxima doivent être calculés coordonnée par coordonnée. Chaque coordonnée du tableau t est ensuite la somme du temps d'attente et de la durée de service de C pour la même expérience :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

n = int(input("Entrez la valeur de n : "))

x = rd.random(n)
y = rd.random(n)
z = rd.random(n)
u = np.minimum(x, y)
print("u =", u)
v = np.maximum(x, y)
print("v =", v)
t = u + z
print("t =", t)
```

Le paramètre n doit être strictement positif. Les appels de simulation donnent ici des triplets indépendants, et les tableaux u , v et t contiennent respectivement n réalisations

de U , V et T .

Le corps du programme a été exécuté avec une valeur fixée de n , en remplaçant seulement la saisie interactive par cette valeur ; les identités coordonnées ont été vérifiées.

- 3) b) Les départs de A et B ont lieu aux instants X et Y ; le dernier de ces deux départs a lieu à l'instant V . Le client C part à l'instant T . L'événement $[T \geq V]$ signifie donc que C quitte l'agence après les deux autres clients ou en même temps que le dernier d'entre eux.

- 3) c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le tableau $t \geq v$ indique pour chaque expérience si l'événement est réalisé. Sa moyenne est sa fréquence empirique :

Python

```
import numpy as np

p = np.mean(t >= v)

print("p =", p)
```

Ce bloc se place après celui de 3) a), qui définit t et v . Il a été exécuté dans ce contexte. Pour des expériences indépendantes, la loi faible des grands nombres appliquée aux indicatrices de $[T \geq V]$ justifie l'approximation de p par cette fréquence lorsque n est grand. Une simulation ne donne pas la valeur exacte de p .

- 3) d) Question adaptée au programme actuel : la référence au langage initial est remplacée par celle au programme Python.

Les fréquences observées autour de 0,666 ... conduisent à conjecturer $p = 2/3$. Cette conclusion est une conjecture suggérée par les expériences ; les seules observations numériques ne la démontrent pas.

Exercice 3

1) a) Méthode 1 — Moments d'une loi exponentielle.

Pour une variable W de loi exponentielle de paramètre 1, une densité est e^{-t} sur $[0, +\infty[$ et 0 ailleurs. Sa normalisation donne la convergence et la valeur $I_0 = 1$. Les résultats du cours donnent $E(W) = 1$ et $V(W) = 1$. Le théorème de transfert et Koenig-Huygens entraînent alors la convergence des intégrales positives I_1 et I_2 et les valeurs :

$$I_1 = E(W) = 1, \quad I_2 = E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = 2.$$

Méthode 2 — Primitives explicites.

Pour $a \geq 0$, des dérivations directes vérifient les primitives et donnent :

$$\int_0^a e^{-t} dt = 1 - e^{-a},$$

$$\int_0^a te^{-t} dt = 1 - (a+1)e^{-a},$$

$$\int_0^a t^2 e^{-t} dt = 2 - (a^2 + 2a + 2)e^{-a}.$$

Les croissances comparées donnent $a^r e^{-a} \rightarrow 0$ pour $r = 0, 1, 2$. Les limites de ces trois intégrales sont donc 1, 1 et 2. Cette seconde approche calcule directement les intégrales, tandis que la première réutilise les moments d'une loi usuelle.

1) b) Sur le segment $[0, a]$, les fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 . Une intégration par parties donne :

$$I_{k+1}(a) = [-t^{k+1}e^{-t}]_0^a + (k+1) \int_0^a t^k e^{-t} dt.$$

Comme $k+1 \geq 1$, le terme à la borne 0 est nul. Ainsi $I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$. L'identité vaut aussi pour $a = 0$.

- 1) c) Pour $k = 2$, l'identité précédente donne $I_3(a) = 3I_2(a) - a^3e^{-a}$. Le premier terme tend vers 6, et le second tend vers 0 par croissance comparée ; ainsi I_3 converge et $I_3 = 6$.

Puis, pour $k = 3$, $I_4(a) = 4I_3(a) - a^4e^{-a}$ tend vers 24. Donc I_4 converge et $I_4 = 24$. Les intégrations par parties ont été faites sur des segments avant tout passage à la limite.

- 2) Développons, pour (x, y) fixé :

$$(y + xt + t^2)^2 e^{-t} = (y^2 + 2xyt + (x^2 + 2y)t^2 + 2xt^3 + t^4)e^{-t}.$$

Chaque fonction $t^k e^{-t}$, pour $0 \leq k \leq 4$, possède une intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ d'après 1). Comme ces fonctions sont positives, les mêmes intégrales assurent la convergence absolue de chaque terme multiplié par son coefficient réel fixé. La somme finie est donc intégrable. L'intégrale définissant $f(x, y)$ converge pour tout couple réel.

- 3) a) Par linéarité d'une somme finie d'intégrales convergentes :

$$f(x, y) = y^2 I_0 + 2xy I_1 + (x^2 + 2y) I_2 + 2x I_3 + I_4.$$

En remplaçant I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 par 1, 1, 2, 6, 24, on obtient :

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

- 3) b) Question adaptée au programme actuel : la nature ouverte du domaine a été précisée dans le préambule ; la demande de cette question est conservée.

Cette expression est polynomiale en x et y . Ses dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert. Il n'est pas nécessaire de dériver l'intégrale qui la définissait.

- 4) a) Le gradient vaut :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 12 \\ 2x + 2y + 4 \end{pmatrix}.$$

Un point critique vérifie $2x + y + 6 = 0$ et $x + y + 2 = 0$. La soustraction donne $x + 4 = 0$, puis $y = 2$. Le seul point critique est donc $(a, b) = (-4, 2)$.

4) b) Les dérivées secondes sont $\partial_{1,1}^2 f = 4$, $\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f = 2$ et $\partial_{2,2}^2 f = 2$. En particulier :

$$H = \nabla^2 f(-4, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) c) Pour déterminer les valeurs propres sans déterminant, écrivons $H = 3I_2 + B$, où :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = 5I_2.$$

Les vecteurs $w_+ = (2, -1 + \sqrt{5})$ et $w_- = (2, -1 - \sqrt{5})$ vérifient directement :

$$Bw_+ = \sqrt{5}w_+, \quad Bw_- = -\sqrt{5}w_-.$$

Ces vecteurs non nuls sont indépendants, leurs valeurs propres étant distinctes. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$. Les deux valeurs propres de H sont donc $3 + \sqrt{5}$ et $3 - \sqrt{5}$. Elles sont strictement positives puisque $\sqrt{5} < 3$.

La fonction est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, le point $(-4, 2)$ est critique, et la hessienne y a toutes ses valeurs propres strictement positives. Le critère du cours établit un minimum local strict en ce point. Sa valeur est :

$$m = f(-4, 2) = 32 + 4 - 48 + 8 - 16 + 24 = 4.$$

5) a) En développant le carré :

$$2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 = 2x^2 + 2xy + 12x + \frac{y^2}{2} + 6y + 18.$$

Ainsi :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18 \right).$$

5) b) L'égalité $\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{y^2}{2} - 2y + 2$ donne :

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4.$$

5) c) En reportant successivement les deux identités dans l'expression de f :

$$f(x, y) = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4.$$

Les deux carrés sont positifs ou nuls. On a donc $f(x, y) \geq 4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

L'égalité exige $y = 2$, puis $x + y/2 + 3 = 0$, soit $x = -4$. Le minimum local est donc un minimum global strict, de valeur 4, atteint uniquement en $(-4, 2)$.

Problème

Partie 1

1) a) Fixons $x \in [0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq t \leq x$, le dénominateur est strictement positif et $1 - t^2 \geq 1 - x^2$. Ainsi :

$$0 \leq \frac{t^m}{1 - t^2} \leq \frac{t^m}{1 - x^2}.$$

Les fonctions sont continues sur le segment $[0, x]$. Par positivité et monotonie de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1 - t^2} dt \leq \frac{x^{m+1}}{(1 - x^2)(m + 1)} \leq \frac{1}{(1 - x^2)(m + 1)}.$$

La dernière inégalité utilise $0 \leq x < 1$, donc $x^{m+1} \leq 1$. Le cas $x = 0$ donne des intégrales

nulles et satisfait la même conclusion.

1) b) Le nombre $1/(1-x^2)$ est fini et indépendant de m . Le majorant de 1) a) tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Le théorème d'encadrement donne donc la limite demandée, égale à 0.

2) a) Il s'agit d'une somme géométrique de raison t^2 , distincte de 1 car $0 \leq t < 1$. Pour $k \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}.$$

2) b) On intègre l'identité précédente sur $[0, x]$. Tous les termes sont continus et la somme est finie, ce qui autorise la linéarité :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

Or $\int_0^x t^{2j} dt = x^{2j+1}/(2j+1)$, d'où l'égalité demandée.

2) c) L'intégrale $J(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1} dt$ est finie, son intégrande étant continue sur $[0, x]$. D'après 1) b), le dernier terme de 2) b) tend vers 0 avec k . Les sommes partielles convergent donc vers $J(x)$:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt.$$

La preuve utilise une identité de sommes finies puis un reste explicite tendant vers zéro ; aucun échange d'une somme infinie et d'une intégrale n'est nécessaire.

- 2) d) Pour $k \geq 1$, on soustrait la somme finie des k premiers termes à la somme totale obtenue en 2) c). L'identité 2) b) donne :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = J(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

Pour $k = 0$, l'égalité se réduit à celle de 2) c) ; elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'autre identité fournie après cette question est un résultat admis dans le sujet initial :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt.$$

Elle sera utilisée dans la partie 2 pour traiter les valeurs paires de N .

Partie 2

- 1) Les lancers sont indépendants et donnent chacun « pile » avec la même probabilité $p \in]0, 1[$. Le rang N du premier succès suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$:

$$\forall n \geq 1, \quad P(N = n) = q^{n-1}p.$$

En particulier, $P(N = n) > 0$ pour tout $n \geq 1$, et $P(N < +\infty) = 1$, puisque la probabilité des r premiers échecs est $q^r \rightarrow 0$.

- 2) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Si $m = 2r$ est pair, $\lfloor m/2 \rfloor = r$ et $2\lfloor m/2 \rfloor = m$. Si $m = 2r + 1$ est impair, $\lfloor m/2 \rfloor = r$, donc $2\lfloor m/2 \rfloor = m - 1 \neq m$. Ces deux cas couvrent tous les entiers naturels et prouvent l'équivalence annoncée. Le résultat numérique de `np.floor` est flottant, mais pour les entiers de taille usuelle considérés ici l'égalité traduit bien ce calcul de partie entière.

2) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La borne supérieure de `rd.randint` étant exclue, le tirage uniforme dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ utilise $N + 1$. Le test de 2) a) identifie les valeurs paires, qui correspondent à une perte :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

p = float(input("Donner la valeur de p : "))
N = rd.geometric(p)
X = rd.randint(1, N + 1)

if 2 * np.floor(X / 2) == X:
    print("le joueur a perdu")
else:
    print("le joueur a gagné")
```

La saisie doit satisfaire $0 < p < 1$. On simule d'abord N , puis, conditionnellement à cette valeur, le tirage d'une boule. Le programme a été exécuté avec des valeurs fixées de p à la place de la saisie interactive. Les bornes $1 \leq X \leq N$ et la cohérence du message avec la parité ont été contrôlées.

3) a) Question adaptée au programme actuel : le domaine $j \geq 1$ est explicité, afin de ne pas conditionner par l'événement impossible $[N = 0]$.

Pour $j \geq 1$, sachant $N = 2j$, le numéro X appartient à $\llbracket 1, 2j \rrbracket$. Si $k \geq j$, alors $2k + 1 > 2j$:

$$P_{[N=2j]}(X = 2k + 1) = 0.$$

3) b) Sachant $N = 2j + 1$, avec $j \geq 0$, on a $X \leq 2j + 1$. Si $k \geq j + 1$, alors $2k + 1 > 2j + 1$; par conséquent :

$$P_{[N=2j+1]}(X = 2k + 1) = 0.$$

3) c) Question adaptée au programme actuel : le domaine $j \geq 1$ est explicité.

Pour $0 \leq k \leq j-1$, le nombre $2k+1$ appartient à $\llbracket 1, 2j \rrbracket$. Les $2j$ boules sont équiprobables conditionnellement à $N = 2j$, donc :

$$P_{[N=2j]}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j}.$$

3) d) Pour $0 \leq k \leq j$, le numéro $2k+1$ appartient à $\llbracket 1, 2j+1 \rrbracket$. Par équiprobabilité conditionnelle :

$$P_{[N=2j+1]}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1}.$$

Cela inclut $j = k = 0$: si $N = 1$, la seule boule porte le numéro 1 et la probabilité vaut 1.

4) a) Les événements $[N = n]$, pour $n \geq 1$, forment un système complet à un événement de probabilité nulle près et ont tous une probabilité strictement positive. La formule des probabilités totales donne, pour chaque $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{[N=n]}(X = 2k+1).$$

On scinde cette somme positive selon la parité, comme l'énoncé l'autorise. Les résultats de 3) éliminent tous les termes où l'urne ne contient pas le numéro $2k+1$. Il reste :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{pq^{2j-1}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{pq^{2j}}{2j+1}.$$

Comme $q > 0$, on peut factoriser p/q et obtenir exactement :

$$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right).$$

4) b) On applique les deux identités de la partie 1 avec $x = q \in]0, 1[$. La première série ci-dessus est l'intégrale admise, la seconde est celle établie en 2) d). D'où :

$$P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \left(\frac{t^{2k+1}}{1-t^2} + \frac{t^{2k}}{1-t^2} \right) dt.$$

Sur $[0, q]$, $1+t$ est non nul et $1-t^2 = (1-t)(1+t)$. L'intégrande se simplifie en $t^{2k}/(1-t)$; ainsi :

$$P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt.$$

5) a) Pour $0 \leq t \leq q < 1$, on a $(1-t)^2 \geq (1-q)^2$ et $1+t \geq 1$. Donc :

$$0 \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \leq \frac{1}{(1-q)^2} \int_0^q t^{2n+2} dt = \frac{q^{2n+3}}{(1-q)^2(2n+3)}.$$

Ce majorant est au plus $1/((1-q)^2(2n+3))$, qui tend vers 0. Le théorème d'encadrement prouve donc la limite nulle.

5) b) On somme l'identité 4) b) sur les seuls indices $0 \leq k \leq n$; la linéarité d'une somme finie donne :

$$\sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^n t^{2k} dt.$$

La somme géométrique vaut $(1-t^{2n+2})/(1-t^2)$. Le produit des dénominateurs est $(1-t)(1-t^2) = (1-t)^2(1+t)$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right).$$

5) c) L'événement A est la réunion disjointe des événements $[X = 2k + 1]$, pour $k \geq 0$. Par additivité des probabilités :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1).$$

L'intégrale sans puissance au numérateur est finie, car son intégrande est continue sur $[0, q]$. La limite de 5) a) fait disparaître le second terme de 5) b). Ainsi :

$$P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt.$$

6) a) Pour $t \notin \{-1, 1\}$, on peut multiplier l'identité recherchée par $(1-t)^2(1+t)$. Elle équivaut à :

$$1 = a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t).$$

L'identification des coefficients donne $a+b+c=1$, $-2b+c=0$ et $-a+b=0$. Ainsi $b=a$, $c=2a$ et $4a=1$, soit :

$$a = b = \frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{2}.$$

En reportant ces valeurs, l'identité polynomiale est vérifiée, ce qui prouve bien la décomposition pour tout t autorisé.

6) b) Sur $[0, q]$, on a $1-t > 0$ et $1+t > 0$. Une primitive de l'intégrande est :

$$-\frac{1}{4} \ln(1-t) + \frac{1}{4} \ln(1+t) + \frac{1}{2(1-t)}.$$

Entre 0 et q , l'intégrale vaut donc :

$$\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \frac{1}{2(1-q)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \frac{q}{2(1-q)}.$$

Puisque $p = 1 - q$, la multiplication par p/q donne :

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1-q}{4q} \ln \left(\frac{1+q}{1-q} \right), \quad 0 < q < 1.$$

6) c) Méthode 1 — Utiliser l'expression obtenue.

Pour $0 < q < 1$, le facteur $(1-q)/(4q)$ est strictement positif et $(1+q)/(1-q) > 1$. Son logarithme est donc strictement positif. L'expression de 6) b) entraîne $P(A) > 1/2$.

Méthode 2 — Compter les numéros impairs dans chaque urne.

Conditionnellement à $N = 2j$, pour $j \geq 1$, l'urne contient j numéros impairs parmi $2j$: $P_{[N=2j]}(A) = 1/2$. Conditionnellement à $N = 2j + 1$, pour $j \geq 0$, elle contient $j + 1$ numéros impairs parmi $2j + 1$:

$$P_{[N=2j+1]}(A) = \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2j+1)} > \frac{1}{2}.$$

La formule des probabilités totales permet de moyenner ces probabilités. Toutes sont au moins $1/2$, et celle correspondant à $N = 1$ est 1, avec $P(N = 1) = p > 0$. Plus précisément :

$$P(A) - \frac{1}{2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{P(N = 2j + 1)}{2(2j + 1)} \geq \frac{p}{2} > 0.$$

Les séries sont convergentes puisqu'elles sont dominées par une somme de probabilités. Cette seconde méthode explique directement l'avantage des numéros impairs, alors que la première exploite la formule exacte obtenue par intégration.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 5) : Code adapté en Python. Assemblage de la matrice par `np.block`, dont la syntaxe et les dimensions sont documentées ; les deux blocs à compléter sont conservés.
- Exercice 2, 3) a), 3) c) et 3) d) : Code adapté en Python. Simulation uniforme, minima et maxima coordonnée par coordonnée, puis fréquence empirique ; documentation ajoutée pour les commandes employées et référence au programme actualisée.
- Exercice 3, préambule après 2) et 3) b) : nature ouverte du domaine $\mathbb{R}^2$ précisée pour l'application du critère d'extremum. La question 3) b) conserve sa demande initiale.

- Problème, partie 2, 2) a) et 2) b) : Code adapté en Python. Partie entière et commandes de simulation documentées ; borne supérieure exclusive du tirage uniforme explicitée, et blancs à compléter préservés.
- Problème, partie 2, 3) a) et 3) c) : domaine $j \geq 1$ explicité afin de ne jamais définir une probabilité conditionnelle sachant $N = 0$.