



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$. Pour guider l'élimination, on pourra commencer par exprimer la troisième inconnue à l'aide de la première équation, puis distinguer le cas $\lambda = -11$.
- 1) b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x , associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation : on précisera les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m , ni à calculer M .
- 1) c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M .
- 1) d) Montrer que A possède trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- 1) e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- 2) L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

2) a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

2) b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E .

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D .

2) c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2) d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

2) e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E .

Exercice 2

1) Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ est définie pour tout réel x .

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

2) Établir que f est impaire.

- 3) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- 3) b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 4) a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout réel t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x + 1) - \ln(x + 1) \leq f(x) \leq \ln 2.$$

- 4) b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 4) c) Dresser le tableau de variation complet de f .
- 4) d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

- 5) a) Montrer que, pour tout réel x , on a $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
- 5) b) Déterminer la dérivée de la fonction qui, à tout réel x , associe $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- 5) c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.
- 6) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

- 6) a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} (1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt.$$

- 6) b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3.$$

6) c) Conclure : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

6) d) Montrer que l'on a aussi $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $u_k = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^k$.

1) Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = u_k$.

2) a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y , puis en déduire l'espérance et la variance de X .

2) b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X .
Les appels successifs à `rd.random()` simulent des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$. La boucle compte les essais jusqu'au premier succès, de probabilité $1/(1+\theta)$.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X(theta):
    y = 1
    while rd.random() > ...:
        y = y + 1
    return ...
```

- 3) Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L , de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^n P_\theta(X_k = x_k),$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$. L'objectif est de choisir, lorsqu'elle existe, la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

- 3) a) Écrire $\ln(L(\theta))$ en fonction de θ et de

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

- 3) b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \quad \varphi(\theta) = S_n \ln \theta - (S_n + n) \ln(1 + \theta).$$

Lorsque $S_n > 0$, montrer que φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{\theta}_n$, et que l'on exprimera en fonction de S_n . Que représente $\hat{\theta}_n$ pour la fonction L ? Étudier séparément le cas $S_n = 0$ et préciser si L atteint son supremum sur $]0, +\infty[$.

On pose dorénavant

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

La variable T_n est un estimateur de θ ; sa réalisation est une estimation du maximum de vraisemblance lorsque $S_n > 0$.

- 3) c) Un estimateur T_n est dit sans biais de θ lorsque $E_\theta(T_n) = \theta$. Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ .

- 3) d) Le risque quadratique de T_n est défini par $r_{T_n}(\theta) = E_\theta((T_n - \theta)^2)$. Calculer $r_{T_n}(\theta)$ et vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.

Problème

- 1) Soit x un réel quelconque.

- 1) a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x, t) dt$.

- 1) b) Montrer que :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y , elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant $Y = \int_0^1 \max(X, t) dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω , $Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt$.

On note F_Y la fonction de répartition de Y .

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X .

- 2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a $Y = X$.

- 3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$.

- 3) a) Déterminer la valeur de $P(X = 0)$.
- 3) b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y .
- 3) c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y . L'appel `rd.randint(0, 4)` fournit un entier uniforme dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_Y_discrete():
    u = rd.randint(0, 4)
    if ...:
        return ...
    else:
        return ...
```

- 4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, avec $X(\Omega) = [0, 1[$.
- 4) a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$.
- 4) b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- 4) c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$.
- 4) d) Étudier la continuité de F_Y sur $\mathbb{R}$ et sa dérivabilité sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2, 1\}$. Calculer F'_Y sur $]1/2, 1[$ et préciser sa limite à droite en $1/2$. Cette dérivée respecte-t-elle la condition de limites finies à gauche et à droite, en tout point réel, imposée aux densités étudiées dans le cours?

- 4) e) Donner la valeur de $E(Y)$.
- 4) f) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y . L'appel `rd.random()` simule une variable de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_Y_uniforme():
    u = rd.random()
    y = ...
    return y
```

- 5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X .

- 5) a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

- 5) b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

- 5) c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- 5) d) La variable aléatoire Y est-elle à densité? Est-elle discrète?