



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) Question adaptée au programme actuel : une indication d'élimination est ajoutée pour limiter la technicité du système à paramètre. La méthode du pivot demandée est conservée.

Notons $q(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53$. Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si le

$$\text{système } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \text{ admet une solution non nulle.}$$

La première ligne donne $z = (\lambda - 7)x - 5y$. En remplaçant z dans les deux autres lignes, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} z = (\lambda - 7)x - 5y, \\ (2\lambda - 8)x - (\lambda + 11)y = 0, \\ (-\lambda^2 + 10\lambda - 15)x + (5\lambda - 14)y = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda = -11$, la deuxième ligne donne $-30x = 0$, puis $z = -5y$. La troisième équation initiale donne $y + 14z = -69y = 0$. Ainsi $x = y = z = 0$: -11 n'est pas valeur propre.

Si $\lambda \neq -11$, le pivot $\lambda + 11$ est non nul et donne :

$$y = \frac{2\lambda - 8}{\lambda + 11}x, \quad z = \frac{\lambda^2 - 6\lambda - 37}{\lambda + 11}x.$$

La dernière équation équivaut alors à :

$$[(-\lambda^2 + 10\lambda - 15)(\lambda + 11) + (5\lambda - 14)(2\lambda - 8)]x = 0,$$

soit $-q(\lambda)x = 0$, car le coefficient développé vaut $-\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda - 53$.

Une solution non nulle impose $x \neq 0$, donc $q(\lambda) = 0$. Réciproquement, si $q(\lambda) = 0$, alors

$\lambda \neq -11$ puisque $q(-11) = -2070$, et on peut prendre $x = \lambda + 11$, $y = 2\lambda - 8$, $z = \lambda^2 - 6\lambda - 37$. Ce vecteur est non nul et satisfait le système.

Les valeurs propres réelles de A sont donc exactement les solutions réelles de $q(\lambda) = 0$.

1) b) La fonction polynomiale f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3((x-3)^2 - 18).$$

Posons $a = 3 - 3\sqrt{2}$ et $b = 3 + 3\sqrt{2}$, avec $a < b$. La dérivée est positive sur $] -\infty, a[$ et $]b, +\infty[$, négative sur $]a, b[$ et nulle en a et b .

Le terme dominant est x^3 , donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$] -\infty, a[$	a	$]a, b[$	b	$]b, +\infty[$
Signe de f'	+	0	−	0	+
Variation de f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Entre a et b , f décroît strictement de $M = f(a)$ à $m = f(b)$. Ainsi M est le maximum local et m le minimum local demandés, sans calculer leurs valeurs.

1) c) Le calcul donne $f(0) = 53$ et $f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82$. Comme $a < 0 < 3 < b$ et que f décroît strictement sur $[a, b]$, on a :

$$M = f(a) > f(0) = 53 > 0, \quad m = f(b) < f(3) = -82 < 0.$$

Donc $M > 0$ et $m < 0$.

1) d) Sur $] -\infty, a[$, la fonction f est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ à la valeur $M > 0$: le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent exactement une racine λ_1 dans $] -\infty, a[$.

Sur $[a, b]$, elle est continue et strictement décroissante, de $M > 0$ à $m < 0$: elle possède exactement une racine λ_2 dans $]a, b[$.

Sur $[b, +\infty[$, elle est continue et strictement croissante, de $m < 0$ à la limite $+\infty$: elle possède exactement une racine λ_3 dans $]b, +\infty[$.

Ces trois intervalles couvrent $\mathbb{R}$ et leurs extrémités ne sont pas des racines. D'après 1) a), A possède exactement les trois valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- 1) e) Choisissons pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$ un vecteur propre non nul v_j associé à λ_j .
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. Les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 constituent donc une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice P dont les colonnes sont ces vecteurs est inversible. Les égalités $Av_j = \lambda_j v_j$ donnent $AP = PD$, puis $A = PDP^{-1}$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

- 2) a) Soit $N = (n_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les coefficients des produits sont $(DN)_{ij} = \lambda_i n_{ij}$ et $(ND)_{ij} = n_{ij} \lambda_j$. Ainsi :

$$DN = ND \iff \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, (\lambda_i - \lambda_j)n_{ij} = 0.$$

Pour $i \neq j$, les valeurs propres sont distinctes, donc $n_{ij} = 0$. Aucune contrainte ne porte sur les termes diagonaux. Par conséquent, N commute avec D si et seulement si N est diagonale.

- 2) b) Comme P est inversible, multiplier une égalité matricielle à gauche par P^{-1} et à droite par P est réversible. En utilisant $A = PDP^{-1}$:

$$AM = MA \iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D.$$

C'est exactement l'équivalence entre (i) et (ii).

- 2) c) Notons $E_{11} = \text{diag}(1, 0, 0)$, $E_{22} = \text{diag}(0, 1, 0)$, $E_{33} = \text{diag}(0, 0, 1)$ et $B_j = PE_{jj}P^{-1}$.

Pour $M \in E$, les questions 2) a) et 2) b) montrent que $P^{-1}MP = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha E_{11} + \beta E_{22} + \gamma E_{33}$, pour certains réels α, β, γ . En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient :

$$M = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3.$$

C'est la combinaison linéaire demandée.

2) d) Méthode 1 — Utiliser les matrices génératrices.

Chaque B_j appartient à E , puisque $P^{-1}B_jP = E_{jj}$ est diagonale. Plus généralement, toute combinaison linéaire des B_j appartient à E , par 2) a) et 2) b). Avec 2) c), cela donne $E = \text{Vect}(B_1, B_2, B_3)$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $\alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 = 0$, on multiplie par P^{-1} et P pour obtenir $\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (B_1, B_2, B_3) est libre et génératrice de E : c'est une base. Ainsi $\dim E = 3$.

Méthode 2 — Voir E comme le noyau d'une application linéaire.

L'application $\Psi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $\Psi(M) = AM - MA$, est linéaire par distributivité du produit matriciel. Par définition $E = \text{Ker } \Psi$, donc E est un sous-espace vectoriel.

L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ envoie E sur l'espace des matrices diagonales, est linéaire et admet pour réciproque $N \mapsto PNP^{-1}$. C'est un isomorphisme entre ces deux espaces. L'espace des matrices diagonales a pour base (E_{11}, E_{22}, E_{33}) , donc pour dimension 3. Il en est de même de E .

La première méthode construit une base ; la seconde met en évidence l'équation linéaire qui définit l'ensemble et le rôle du changement de base.

2) e) Soit Q un polynôme réel de degré au plus 2 vérifiant $Q(A) = 0$. Pour tout vecteur propre $v_j \neq 0$, on a $A^k v_j = \lambda_j^k v_j$ pour chaque entier naturel k , puis $Q(A)v_j = Q(\lambda_j)v_j$. Il s'ensuit que $Q(\lambda_j) = 0$, pour $j = 1, 2, 3$.

Un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes est nul. Ainsi aucun polynôme non nul de degré au plus 2 n'annule A .

Les matrices I, A, A^2 commutent chacune avec A , donc appartiennent à E . Si $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$, le polynôme $Q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ annule A ; il est donc nul, ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace E de dimension 3 : elle en est une base.

Exercice 2

- 1) La fonction $h : t \mapsto 1/\sqrt{t^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque $t^2 + 1 \geq 1$. Elle est intégrable sur tout segment de bornes x et $2x$. Si $x < 0$, l'ordre des bornes est inversé et l'on utilise la convention d'intégrale orientée; si $x = 0$, l'intégrale est nulle. Ainsi $f(x)$ est défini pour tout réel x .
- 2) La fonction h est paire. Pour tout réel x , le changement de variable affine $t = -u$ donne :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} h(t) dt = - \int_x^{2x} h(-u) du = - \int_x^{2x} h(u) du = -f(x).$$

Ainsi f est impaire.

- 3) a) Posons $H(x) = \int_0^x h(t) dt$. La continuité de h sur $\mathbb{R}$ implique que H est de classe C^1 et que $H' = h$. Par Chasles, $f(x) = H(2x) - H(x)$. La composition par une fonction affine et la différence conservent la classe C^1 , donc $f \in C^1(\mathbb{R})$.

- 3) b) En dérivant l'expression précédente :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Méthode 1 — Comparer des quantités positives.

Les deux termes comparés sont strictement positifs. Leur ordre est donc celui de leurs

carrés. Or :

$$\frac{4}{4x^2 + 1} > \frac{1}{x^2 + 1} \iff 4x^2 + 4 > 4x^2 + 1,$$

car les dénominateurs sont strictement positifs. Cette dernière inégalité est vraie. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout réel x , et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Réduire au même dénominateur et rationaliser.

On peut aussi écrire :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Le numérateur est égal à $\frac{4(x^2 + 1) - (4x^2 + 1)}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + 1}}$, qui est strictement positif. Le dénominateur l'est également : $f'(x) > 0$, d'où la même stricte croissance.

La comparaison des carrés est plus rapide pour établir le signe ; la rationalisation fournit en plus une écriture explicite entièrement positive.

4) a) Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, on a $t > 0$ et :

$$t^2 \leq t^2 + 1 \leq (t + 1)^2 \implies \frac{1}{t + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t}.$$

Les fonctions sont continues sur ce segment et les bornes sont dans l'ordre croissant. En intégrant :

$$\ln(2x + 1) - \ln(x + 1) \leq f(x) \leq \ln(2x) - \ln x = \ln 2.$$

C'est l'encadrement demandé.

4) b) On a $\ln(2x + 1) - \ln(x + 1) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right)$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le quotient tend vers 2 ; par continuité du logarithme en 2, la borne inférieure tend vers $\ln 2$. La borne

supérieure est constante égale à $\ln 2$. Le théorème d'encadrement donne donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2.$$

- 4) c) L'imparité entraîne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$. Par ailleurs $f(0) = 0$ et f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de f'	+	+	+
$f(x)$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$

La fonction f croît strictement de la limite $-\ln 2$ à la limite $\ln 2$, en passant par 0 à l'origine. Ses deux limites ne sont pas atteintes.

- 4) d) Puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement la solution $x = 0$.
- 5) a) Pour tout réel x , l'inégalité $x^2 + 1 > x^2$ donne $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$. Comme $x + |x| \geq 0$, on obtient $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
- 5) b) La fonction $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après 5) a). La règle de dérivation d'une composée donne :

$$g'(x) = \frac{1 + x/\sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Le facteur simplifié est strictement positif par 5) a). Ainsi g est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

- 5) c) La formule de calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive donne, pour tout réel x :

$$f(x) = g(2x) - g(x) = \ln \left(\frac{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

Les deux arguments des logarithmes sont strictement positifs, donc le quotient et cette expression sont bien définis.

- 6) a) Pour $x > 0$, l'intégrale de la constante 1 sur $[x, 2x]$ vaut x . Par linéarité et rationalisation :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt,$$

$$\sqrt{t^2 + 1} - 1 = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + 1}.$$

Tous les dénominateurs sont positifs. En remplaçant dans l'intégrale, on obtient l'égalité demandée.

- 6) b) Pour tout réel t , on a $\sqrt{t^2 + 1} \geq 1$, donc $\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1}) \geq 2$. Pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$:

$$0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(1 + \sqrt{t^2 + 1})} \leq \frac{t^2}{2}.$$

L'intégration d'inégalités donne :

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{8x^3 - x^3}{3} = \frac{7}{6} x^3.$$

- 6) c) Pour $x > 0$, la division de cet encadrement par x conserve les inégalités :

$$0 \leq 1 - \frac{f(x)}{x} \leq \frac{7}{6} x^2.$$

La borne de droite tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ainsi $f(x)/x \rightarrow 1$ et $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

- 6) d) Méthode 1 — Exploiter l'impairité.

Pour $x < 0$, posons $u = -x > 0$. Comme f est impaire, $\frac{f(x)}{x} = \frac{-f(u)}{-u} = \frac{f(u)}{u}$.
Lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $u \rightarrow 0^+$; la question 6) c) donne donc $f(x)/x \rightarrow 1$. Ainsi $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Méthode 2 — Utiliser le nombre dérivé à l'origine.

La fonction f est dérivable en 0, $f(0) = 0$ et, d'après 3) b), $f'(0) = 2 - 1 = 1$. Par définition de la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1.$$

Cette limite bilatérale donne en particulier $f(x) \underset{0}{\sim} x$. La première méthode réutilise l'estimation intégrale demandée; la seconde reconnaît directement un équivalent du premier ordre à partir de la dérivée.

Exercice 3

1) Posons $p = 1/(1 + \theta)$ et $q = \theta/(1 + \theta)$. Comme $\theta > 0$, on a $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$. Tous les nombres $u_k = pq^k$ sont positifs. La série géométrique converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

Les nombres u_k définissent donc une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

2) a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y = j) = P(X = j - 1) = pq^{j-1}.$$

Ainsi Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/(1 + \theta)$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette loi admet une espérance $E(Y) = 1/p = 1 + \theta$ et une variance $V(Y) = q/p^2 = \theta(1 + \theta)$. Comme $X = Y - 1$, les propriétés des transformations affines donnent :

$$E(X) = \theta, \quad V(X) = \theta(1 + \theta).$$

L'existence de ces moments est assurée par celle des moments de la loi géométrique.

2) b) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X(theta):
    y = 1
    while rd.random() > 1 / (1 + theta):
        y = y + 1
    return y - 1
```

Chaque appel à `rd.random()` représente un essai indépendant, avec succès lorsque le résultat est inférieur ou égal à $p = 1/(1 + \theta)$. La variable y vaut initialement 1 ; elle augmente d'une unité à chaque échec. À la sortie, y est le rang du premier succès et suit la même loi que Y . La valeur renvoyée $y - 1$ compte les échecs précédant ce succès et suit la loi de X .

La probabilité de ne pas avoir obtenu de succès après m essais vaut q^m , qui tend vers 0 : la boucle se termine avec probabilité 1. Le code a été exécuté pour plusieurs valeurs strictement positives de θ ; les sorties sont des entiers positifs ou nuls. Les simulations servent de contrôle informatique, sans remplacer l'identification théorique de la loi.

3) a) Pour chaque k , $P_\theta(X_k = x_k) = \theta^{x_k} / (1 + \theta)^{x_k+1}$. L'indépendance des observations justifie le produit de ces probabilités dans la vraisemblance :

$$L(\theta) = \frac{\theta^{S_n}}{(1 + \theta)^{S_n+n}} > 0 \quad (\theta > 0).$$

On peut donc prendre le logarithme :

$$\ln L(\theta) = S_n \ln \theta - (S_n + n) \ln(1 + \theta).$$

Ici S_n est une somme de valeurs observées, donc un entier fixé pendant la maximisation.

- 3) b) Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : le cas $S_n = 0$ ne donne pas de maximum sur le domaine ouvert $]0, +\infty[$. Il doit être distingué.

Pour $\theta > 0$, la fonction φ est dérivable et :

$$\varphi'(\theta) = \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1 + \theta} = \frac{S_n - n\theta}{\theta(1 + \theta)}.$$

Si $S_n > 0$, le dénominateur est positif ; la dérivée est positive pour $0 < \theta < S_n/n$, nulle pour $\theta = S_n/n$ et négative au-delà. La fonction φ admet donc un maximum global unique au point $\hat{\theta}_n = S_n/n > 0$.

Comme le logarithme est strictement croissant et que $L > 0$, maximiser $\varphi = \ln L$ équivaut à maximiser L . Ainsi $\hat{\theta}_n = S_n/n$ est l'unique estimation du maximum de vraisemblance lorsque $S_n > 0$.

Si $S_n = 0$, alors $\varphi(\theta) = -n \ln(1 + \theta)$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $L(\theta) = (1 + \theta)^{-n}$. On a $L(\theta) < 1$ pour tout $\theta > 0$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} L(\theta) = 1$. Le supremum est 1, mais il n'est pas atteint. Il n'existe donc aucune estimation du maximum de vraisemblance dans le domaine $\theta > 0$ pour cet échantillon.

L'événement où toutes les observations sont nulles a la probabilité $(1 + \theta)^{-n} > 0$; ce cas ne peut être écarté. L'estimateur aléatoire T_n reste défini, y compris sur cet événement où il vaut 0, mais sa réalisation n'est alors pas un maximiseur admissible de L sur $]0, +\infty[$.

- 3) c) Question adaptée au programme actuel : la notion de biais est définie dans l'énoncé pour permettre son étude concrète.

Chaque X_i possède une espérance finie égale à θ d'après 2) a). La linéarité de l'espérance donne :

$$E_\theta(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_\theta(X_i) = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $\theta > 0$: T_n est sans biais de θ .

- 3) d) Question adaptée au programme actuel : le risque quadratique est défini dans l'énoncé, sans supposer un chapitre théorique d'estimation.

Chaque X_i possède une variance finie $\theta(1 + \theta)$. Les variables de l'échantillon étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances. Ainsi :

$$V_{\theta}(T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V_{\theta}(X_i) = \frac{\theta(1 + \theta)}{n}.$$

Comme $E_{\theta}(T_n) = \theta$, la définition de la variance donne :

$$r_{T_n}(\theta) = E_{\theta}((T_n - \theta)^2) = V_{\theta}(T_n) = \frac{\theta(1 + \theta)}{n}.$$

Pour tout paramètre fixé $\theta > 0$, cette quantité tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Problème

1) a) Méthode 1 — Écrire la fonction par morceaux.

Pour x fixé, $\max(x, t) = x$ si $t \leq x$ et $\max(x, t) = t$ si $t \geq x$. Chacune de ces expressions est continue sur son intervalle de définition, et elles valent toutes deux x au point de raccord $t = x$. La fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Utiliser la valeur absolue.

Pour tous réels x, t , on a $\max(x, t) = \frac{x + t + |x - t|}{2}$. À x fixé, le membre de droite est une combinaison de fonctions continues de t , donc est continu sur $\mathbb{R}$.

La première méthode prépare le découpage de l'intégrale ; la seconde fournit une expression globale utile pour manipuler un maximum.

1) b) La continuité établie garantit l'existence de l'intégrale sur $[0, 1]$.

Si $x \leq 0$, alors $t \geq x$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $y = \int_0^1 t \, dt = 1/2$.

Si $0 < x \leq 1$, on coupe au point $t = x$:

$$y = \int_0^x x \, dt + \int_x^1 t \, dt = x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}.$$

Si $x > 1$, alors $x > t$ sur tout le segment et $y = \int_0^1 x \, dt = x$.

Ces trois cas donnent exactement la formule demandée, y compris les valeurs de raccord $x = 0$ et $x = 1$.

Dans la suite, on note $g(x) = \frac{1}{2}$ pour $x \leq 0$, $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$ pour $0 < x \leq 1$ et $g(x) = x$ pour $x > 1$. L'égalité établie point par point donne $Y = g(X)$.

2) Une variable de loi géométrique au sens du programme prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Si $X = 1$, la formule de 1) b) donne $Y = (1^2 + 1)/2 = 1 = X$. Si $X > 1$, elle donne directement $Y = X$. Ainsi $Y = X$ pour toute valeur possible de X .

3) a) Les trois événements $[X = -1]$, $[X = 0]$ et $[X = 1]$ forment un système complet.

Leurs probabilités ont donc pour somme 1 :

$$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3) b) D'après 1) b), $g(-1) = g(0) = 1/2$ et $g(1) = 1$. Ces valeurs sont toutes deux atteintes, donc $Y(\Omega) = \{1/2, 1\}$.

Les événements $[X = -1]$ et $[X = 0]$ étant incompatibles :

$$P(Y = 1/2) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

y	1/2	1
$P(Y = y)$	3/4	1/4

3) c) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_Y_discrete():
    u = rd.randint(0, 4)
    if u < 3:
        return 0.5
    else:
        return 1.0
```

L'entier u est uniforme parmi 0, 1, 2, 3. La condition $u < 3$ est vraie pour trois de ces quatre valeurs : le programme renvoie $1/2$ avec probabilité $3/4$ et 1 avec probabilité $1/4$, ce qui correspond à la loi calculée en 3) b).

Ce code a été exécuté ; les deux sorties et leurs fréquences ont été contrôlées. La simulation illustre la loi, tandis que le comptage précédent établit les probabilités exactes.

- 4) a) Pour toute valeur $x \in [0, 1[$ prise par X , la formule de 1) b) donne $g(x) = (x^2 + 1)/2$: elle vaut également $1/2$ lorsque $x = 0$. Ainsi $Y = (X^2 + 1)/2$.
- 4) b) La fonction $x \mapsto (x^2 + 1)/2$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$. Elle vaut $1/2$ en 0 et tend vers 1 lorsque $x \rightarrow 1^-$. Son image est donc $[1/2, 1[$. Puisque $X(\Omega) = [0, 1[$, on en déduit $Y(\Omega) = [1/2, 1[$.
- 4) c) Pour $x \in [1/2, 1[$, le nombre $a = \sqrt{2x - 1}$ appartient à $[0, 1[$. Comme $X \geq 0$, les transformations suivantes sont équivalentes :

$$Y \leq x \iff X^2 \leq 2x - 1 \iff X \leq \sqrt{2x - 1}.$$

La fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[0, 1[$ vaut a pour $a \in [0, 1]$. Ainsi $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$. En complétant avec 4) b) :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ \sqrt{2x-1} & \text{si } 1/2 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 4) d) Question adaptée au programme actuel. La demande initiale de conclure à une variable à densité conduit ici à une dérivée non bornée au voisinage de $1/2$; l'étude est conservée au niveau de la fonction de répartition et de sa dérivée, afin de respecter le cadre limitatif du programme.

La fonction F_Y est continue sur les trois intervalles ouverts de la formule précédente. À la borne $1/2$, on a $F_Y(1/2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \sqrt{2x-1} = 0$; la limite à gauche vaut aussi 0. À la borne 1, la limite à gauche vaut 1, comme $F_Y(1)$ et la limite à droite. Ainsi F_Y est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Elle est de classe C^1 en dehors de $\{1/2, 1\}$. Sur $]1/2, 1[$, la dérivation d'une composée donne :

$$F'_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Cette dérivée tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow (1/2)^+$. Elle ne respecte donc pas la restriction de limites finies à gauche et à droite en tout point imposée aux densités étudiées dans le cours. La seule continuité de F_Y ne permet pas de supprimer cette restriction. Aucune valeur attribuée au seul point $1/2$ ne change cette limite infinie.

- 4) e) La variable X est à densité uniforme sur $[0, 1[$. On applique le transfert à la fonction continue $g(x) = (x^2 + 1)/2$ sur cet intervalle. L'intégrale de sa valeur absolue est finie, puisque $0 \leq g(x) \leq 1$. Par conséquent Y possède une espérance et :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}.$$

Ce calcul utilise la densité de X et ne nécessite pas de considérer une densité singulière de Y .

4) f) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_Y_uniforme():
    u = rd.random()
    y = (u ** 2 + 1) / 2
    return y
```

La variable u simule X ; la transformation calculée est exactement celle de 4) a). La sortie appartient donc à $[1/2, 1[$ et possède la loi de Y . Le code a été exécuté ; les bornes et une moyenne empirique ont été contrôlées. L'espérance exacte reste celle calculée par transfert en 4) e).

5) a) La formule de 1) b) donne $g(x) = 1/2$ sur $] -\infty, 0]$, puis parcourt $]1/2, 1]$ lorsque x parcourt $]0, 1]$, et enfin $]1, +\infty[$ lorsque x parcourt $]1, +\infty[$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, toutes ces valeurs sont possibles, et $Y(\Omega) = [1/2, +\infty[$.

5) b) L'égalité $g(x) = 1/2$ est satisfaite exactement lorsque $x \leq 0$. En effet, pour $x > 0$, chacune des deux autres expressions de g est strictement supérieure à $1/2$. Par symétrie de la loi normale centrée réduite :

$$P(Y = 1/2) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

5) c) Posons $A_0 = [X \leq 0]$, $A_1 = [0 < X \leq 1]$ et $A_2 = [X > 1]$. Ces événements sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω . Leurs probabilités sont respectivement $1/2$, $\Phi(1) - 1/2$ et $1 - \Phi(1)$, toutes strictement positives. La formule des probabilités totales s'applique donc :

$$F_Y(x) = \sum_{j=0}^2 P(A_j)P(Y \leq x \mid A_j) = \sum_{j=0}^2 P([Y \leq x] \cap A_j).$$

Si $x < 1/2$, les trois intersections sont vides d'après 5) a), donc $F_Y(x) = 0$.

Si $1/2 \leq x \leq 1$, posons $a = \sqrt{2x-1} \in [0, 1]$. Sur A_0 , on a toujours $Y = 1/2 \leq x$, ce qui contribue pour $1/2$. Sur A_1 , la condition $Y \leq x$ est équivalente à $0 < X \leq a$, ce qui contribue pour $\Phi(a) - 1/2$. Sur A_2 , on a $Y = X > 1 \geq x$, donc la contribution est nulle. Ainsi $F_Y(x) = \Phi(a) = \Phi(\sqrt{2x-1})$.

Si $x > 1$, les événements A_0 et A_1 contribuent intégralement, pour une somme $\Phi(1)$. Sur A_2 , on a $Y = X$, donc la contribution vaut $P(1 < X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(1)$. Au total $F_Y(x) = \Phi(x)$.

On obtient donc :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les deux expressions se raccordent en $x = 1$, puisqu'elles y valent $\Phi(1)$.

- 5) d) La fonction F_Y présente un saut en $1/2$: sa limite à gauche vaut 0 alors que $F_Y(1/2) = 1/2$. Une variable à densité a une fonction de répartition continue. La variable Y n'est donc pas à densité.

Elle n'est pas non plus discrète. Pour tout $y \in]1/2, 1]$, l'événement $[Y = y]$ est égal à $[X = \sqrt{2y-1}]$; pour tout $y > 1$, il est égal à $[X = y]$. Une variable normale attribue une probabilité nulle à chaque valeur isolée, donc $P(Y = y) = 0$ pour tout $y > 1/2$. Le seul point de probabilité positive est $1/2$, de masse $1/2$.

Si Y était discrète, la somme des probabilités de ses valeurs possibles devrait être 1. Or toute famille finie ou dénombrable de valeurs ne porte ici qu'une masse totale au plus égale à $1/2$. C'est impossible. Ainsi Y n'est ni à densité ni discrète.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 1) a) : ajout d'une indication pour le pivot et du cas particulier $\lambda = -11$, afin d'accompagner le système à paramètre conformément aux commentaires limitatifs du programme ; méthode et objectif originaux conservés.
- Exercice 3, 2) b) : Code adapté en Python ; conversion de la simulation du rang du premier succès en boucle `while`, avec documentation de `rd.random()` et conservation des blancs à compléter.
- Exercice 3, 3) b) : rectification de l'affirmation de maximum lorsque $S_n = 0$; ce cas donne seulement un supremum non atteint sur $\theta > 0$. La phrase définissant ensuite T_n distingue l'estimateur et sa réalisation, et ne lui attribue la propriété de maximisation que lorsque $S_n > 0$.
- Exercice 3, 3) c) et 3) d) : ajout des définitions particulières du caractère sans biais et du risque quadratique, pour conserver les calculs sans supposer la théorie d'estimation de la voie approfondie.
- Problème, 3) c) et 4) f) : Code adapté en Python ; documentation des sorties de `rd.randint(0, 4)` et `rd.random()`, blancs maintenus dans le sujet et codes complets dans le corrigé.
- Problème, 4) d) : remplacement de la caractérisation par une densité non bornée par l'étude de la fonction de répartition, de sa dérivée et de la limite infinie en $1/2$; respect de la restriction officielle portant sur les limites finies des densités. Les questions 4) a), b), c), e) et f) restent inchangées mathématiquement ; l'espérance se calcule par transfert depuis la variable uniforme X .