



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2013

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

- 1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
- 1) b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 1) c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
- 2) a) Écrire une fonction Python qui renvoie la valeur de u_n .
- 2) b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.
- 3) a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .
- 3) b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}).$$

- 3) c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2.$$

Exercice 2

- 1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3 .
- 1) b) Déterminer une base (a) de $\text{Ker } f$ ainsi qu'une base (b, c) de $\text{Im } f$.
- 1) c) Montrer que $\text{Im } f^2 = \text{Ker } f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0.$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\text{Im } g^2 = \text{Ker } g$.

- 2) a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g .
- 2) b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est la seule valeur propre de g .
- 2) c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.
- 3) a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

- 3) b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
- 3) c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
- 3) d) Déterminer $\text{Im } g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\text{Ker } g$. Pour finir, déterminer $\text{Im } g^2$ puis conclure.

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n + 2)$ boules noires.

On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.

Pour tout entier naturel j , on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j + 2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état n .

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant. Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j , on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne ; l'urne est alors dans l'état $(j - 1)$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne ; l'urne est alors dans l'état $(j + 1)$.

Lorsque l'état 0 est atteint, on ne fait plus de tirage et le nombre de boules blanches reste égal à 0.

- 1) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et trois boules noires) et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la

deuxième épreuve.

On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1) a) Donner la loi de X_1 .

1) b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2 .

1) c) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

Après l'importation `import numpy.random as rd`, `rd.randint(m)` renvoie au hasard, de façon équiprobable, un entier compris entre 0 et $m - 1$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et pour qu'il affiche les valeurs des variables aléatoires X_1 et X_2 .

Python

```
import numpy.random as rd

tirage = rd.randint(4)

if tirage == 0:
    X1 = ...
else:
    X1 = ...

if X1 == 0:
    X2 = ...
else:
    tirage = rd.randint(6)
    if tirage <= 1:
        X2 = ...
    else:
        X2 = ...
```

```
print(X1, X2)
```

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note E_j l'événement « les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini », dans l'expérience où l'urne est initialement dans l'état j . On pose $e_j = P(E_j)$, la probabilité étant prise pour cet état initial, et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

2) Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état n), que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}.$$

3) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \geq e_{n+1}$.

3) b) En déduire que la suite (e_n) est convergente.

On admet pour la suite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0$.

4) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = (n+1)e_n$.

4) a) Pour tout entier naturel n non nul, écrire u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1} .

4) b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et e_1 .

4) c) Montrer enfin que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Déterminer la valeur de e_1 , puis en déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de e_n en fonction de n .

Problème

1) On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) a) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

1) b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité.

2) a) Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.

2) b) Établir l'existence de la variance de X , puis donner sa valeur.

3) Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

- 4) a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
- 4) b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X .
- 4) c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 4) d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.
- 5) On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $I = \inf(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $I(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$.

On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que, pour tout réel x , on a $P(I > x) = P([U > x] \cap [V > x])$.

Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I .

- 5) a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x .
- 5) b) En déduire que I suit la même loi que Y .
- 6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7) Simulation informatique de la loi de Y .

Après l'importation `import numpy.random as rd`, `rd.random()` simule une variable uniforme sur $[0, 1[$. Deux appels successifs fournissent des tirages indépendants dans le modèle de simulation.

Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

Python

```
import numpy.random as rd

def y():
    u = ...
    v = ...
    if u < v:
        return ...
    else:
        return ...
```