



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2013

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) a) On raisonne par récurrence en établissant l'encadrement plus précis $0 \leq u_n < 1$.

Il est vrai pour $n = 0$, car $u_0 = 0$. Supposons $0 \leq u_n < 1$. Alors $0 \leq u_n^2 < 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2} < 1.$$

L'encadrement est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $0 \leq u_n \leq 1$.

1) b) Pour étudier la monotonie, on calcule la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(1 - u_n)^2}{2}.$$

Comme $u_n < 1$, cette différence est strictement positive. La suite (u_n) est strictement croissante.

1) c) La suite est croissante et majorée par 1 : le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

La fonction $t \mapsto (t^2 + 1)/2$ est continue sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :

$$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}, \quad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On part de u_0 puis on applique exactement n fois la relation de récurrence. La fonction suivante reçoit un entier naturel n et renvoie une approximation numérique de u_n .

Python

```
def terme_u(n):
    u = 0.0
    for k in range(n):
        u = (u**2 + 1) / 2
    return u
```

Au début de l'itération d'indice k , la variable u représente u_k ; après l'affectation, elle représente u_{k+1} . Pour $n = 0$, la boucle est vide et la valeur renvoyée est bien $u_0 = 0$.

Code exécuté pour plusieurs indices, dont 0, 1 et 2 ; les résultats sont respectivement 0, 1/2 et 5/8.

2) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On teste les indices dans l'ordre croissant. L'inégalité $1 - u_n > 0$ est assurée mathématiquement par la question 1) a) ; il suffit donc de continuer tant que $1 - u_n \geq 10^{-3}$.

Python

```
def terme_u(n):
    u = 0.0
    for k in range(n):
        u = (u**2 + 1) / 2
    return u

n = 0
while 1 - terme_u(n) >= 10**(-3):
    n = n + 1
print(n)
```

Comme $1 - u_n \rightarrow 0$ et $1 - u_n > 0$, le programme termine. Tous les indices précédant celui affiché ont échoué au test ; l'indice affiché est donc le premier qui convient dans ce calcul numérique.

Code exécuté : il affiche 1991. Les valeurs calculées sont $1 - u_{1990} \simeq 0,00100031593468$ et $1 - u_{1991} \simeq 0,000999815618699$, de part et d'autre du seuil demandé.

3) a) On utilise $v_k = 1 - u_k$ et la différence calculée en 1) b) :

$$v_k - v_{k+1} = u_{k+1} - u_k = \frac{(1 - u_k)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k - v_{k+1} = v_k^2/2$.

3) b) La somme est télescopique. Pour $n \geq 1$, les termes intermédiaires s'annulent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = 1 - v_n = u_n.$$

3) c) Pour tout $n \geq 1$, la question 3) a) donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = 2u_n.$$

Ces sommes partielles tendent vers 2, puisque $u_n \rightarrow 1$. Par définition de la convergence d'une série, la série

$$\sum_{n \geq 0} v_n^2$$

converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2.$$

Exercice 2

On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à leurs colonnes de coordonnées dans la base canonique. Les calculs sur f et g se traduisent ainsi par les calculs sur leurs matrices A et M .

1) a) Le produit matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, son coefficient en position $(1, 1)$ est $2 \times 2 + 1 \times (-1) + 2 \times (-1) = 1$ et celui en position $(2, 1)$ est $(-1) \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0$. La matrice A^2 n'est donc pas nulle.

Chacune de ses colonnes est égale à $a = (1, 0, -1)$. Or $Aa = 0$, car la première et la troisième colonne de A sont égales. Il en résulte que :

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) b) On résout d'abord le système du noyau. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0, \\ -x - y - z = 0, \\ -x - z = 0. \end{cases}$$

La dernière équation donne $z = -x$, puis la deuxième donne $y = 0$; la première est alors satisfaite. Ainsi :

$$\text{Ker } f = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(a), \quad a = (1, 0, -1).$$

Comme $a \neq 0$, la famille (a) est une base du noyau.

L'image est engendrée par les colonnes de A . Posons $b = (2, -1, -1)$ et $c = (1, -1, 0)$. La troisième colonne est égale à b , donc $\text{Im } f = \text{Vect}(b, c)$.

Si $\alpha b + \beta c = 0$, la troisième coordonnée impose $\alpha = 0$, puis la deuxième impose $\beta = 0$.

La famille (b, c) est libre, donc c'est une base de l'image. En particulier, $\dim \text{Im } f = 2$.

1) c) Méthode 1 — Lecture de la matrice de f^2

La matrice de f^2 dans la base canonique est A^2 . Ses trois colonnes sont a , donc son image est $\text{Vect}(a)$, puisque $a \neq 0$. La question précédente donne également $\text{Ker } f = \text{Vect}(a)$. Ainsi, $\text{Im } f^2 = \text{Ker } f$.

Méthode 2 — Inclusion et dimensions

Comme $A^3 = 0$, on a $f(f^2(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Cela établit $\text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f$.

D'autre part, $A^2 \neq 0$, donc $\text{Im } f^2$ contient un vecteur non nul. Le noyau est de dimension 1, d'après 1) b); un sous-espace non nul de cet espace est nécessairement l'espace entier. On obtient encore $\text{Im } f^2 = \text{Ker } f$.

La première méthode fournit directement l'image par les colonnes; la seconde exploite la relation de composition et la dimension du noyau, ce qui prépare le cas général.

2) a) Soit λ une valeur propre réelle de M , et soit $X \neq 0$ un vecteur colonne tel que $MX = \lambda X$. En appliquant trois fois M , on obtient :

$$0 = M^3 X = \lambda^3 X.$$

Comme $X \neq 0$, on a $\lambda^3 = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi, la seule valeur propre possible de g est 0.

2) b) Il reste à prouver que 0 est effectivement valeur propre. Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas. Alors $\text{Ker } M = \{0\}$, donc l'application $X \mapsto MX$ est injective.

Pour tout vecteur X , on a $M(M^2 X) = 0$, d'où $M^2 X = 0$ par injectivité. En appliquant encore deux fois cette injectivité, on déduit $MX = 0$, puis $X = 0$. Cela imposerait que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ soient nuls, ce qui est faux.

Cette contradiction établit que 0 est une valeur propre de g . Avec la question 2) a), son spectre est donc exactement $\{0\}$.

- 2) c) Supposons, par l'absurde, que g soit diagonalisable. Il existerait une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$, avec D diagonale et ses coefficients diagonaux égaux à des valeurs propres de M .

D'après 2) b), tous ces coefficients seraient nuls : $D = 0$. On aurait alors $M = 0$, donc $M^2 = 0$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi, g n'est pas diagonalisable.

- 3) a) L'hypothèse $g^2 \neq 0$ signifie précisément que l'application g^2 n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

- 3) b) On montre que la famille annoncée est libre. Supposons :

$$\alpha u + \beta g(u) + \gamma g^2(u) = 0.$$

L'application de g^2 donne $\alpha g^2(u) = 0$, car $g^3 = 0$ et donc $g^4 = 0$. Comme $g^2(u) \neq 0$, on obtient $\alpha = 0$.

La relation devient $\beta g(u) + \gamma g^2(u) = 0$. En lui appliquant g , on obtient $\beta g^2(u) = 0$, donc $\beta = 0$. Il reste $\gamma g^2(u) = 0$, donc $\gamma = 0$.

Les trois vecteurs sont libres dans $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3 : ils forment une base $\mathcal{B}' = (u, g(u), g^2(u))$.

- 3) c) Les images successives des vecteurs de cette base sont $g(u)$, $g^2(u)$ et 0. Leurs coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont respectivement $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, 0)$. Par définition d'une matrice d'endomorphisme dans une base :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) d) Comme $\mathcal{B}'$ est une base, l'image de g est engendrée par les images de ses trois vecteurs :

$$\text{Im } g = \text{Vect}(g(u), g^2(u)).$$

Ces deux vecteurs sont libres, comme sous-famille de $\mathcal{B}'$, donc $\dim \operatorname{Im} g = 2$. Le théorème du rang donne alors $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 2 = 1$.

Or $g^2(u) \neq 0$ et $g(g^2(u)) = g^3(u) = 0$. Donc $(g^2(u))$ est une base de $\operatorname{Ker} g$.

Enfin, g^2 envoie les vecteurs u , $g(u)$ et $g^2(u)$ respectivement sur $g^2(u)$, 0 et 0. Il en résulte :

$$\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Vect}(g^2(u)) = \operatorname{Ker} g.$$

L'égalité recherchée est établie pour tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant les hypothèses.

Exercice 3

- 1) a) L'urne contient initialement une boule blanche et trois boules noires. Le tirage est équiprobable parmi les quatre boules.

Une boule blanche est tirée avec probabilité $1/4$: l'urne passe à l'état 0. Une boule noire est tirée avec probabilité $3/4$: l'urne passe à l'état 2. La loi est donc :

$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{3}{4}.$$

La probabilité de toute autre valeur est nulle.

- 1) b) Question adaptée au programme actuel : la convention à l'état 0, déjà utilisée par le programme original, est explicitée dans l'énoncé.

On utilise le système complet $([X_1 = 0], [X_1 = 2])$, dont les deux événements ont des probabilités strictement positives.

Si $X_1 = 0$, on ne tire plus : $X_2 = 0$. Si $X_1 = 2$, l'urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Au tirage suivant, elle passe à l'état 1 avec probabilité $2/6 = 1/3$, et à l'état 3 avec probabilité $4/6 = 2/3$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_2 = 0) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(X_2 = 1) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(X_2 = 3) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Les trois probabilités ont pour somme 1 ; il n'y a pas d'autre valeur possible.

1) c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les entiers 0, 1, 2, 3 représentent les quatre boules du premier tirage ; seul 0 représente la boule blanche. Si l'urne passe à l'état 2, les entiers 0, 1 représentent les deux boules blanches parmi les six boules présentes.

Python

```
import numpy.random as rd

tirage = rd.randint(4)
if tirage == 0:
    X1 = 0
else:
    X1 = 2

if X1 == 0:
    X2 = 0
else:
    tirage = rd.randint(6)
    if tirage <= 1:
        X2 = 1
    else:
        X2 = 3

print(X1, X2)
```

L'affichage est l'une des réalisations (0, 0), (2, 1) ou (2, 3). Les branches reproduisent exactement les probabilités des questions 1) a) et 1) b).

Code exécuté ; toutes les branches ont aussi été contrôlées en imposant des tirages

représentatifs. Les simulations illustrent le modèle, sans remplacer les calculs de probabilités.

- 2) Question adaptée au programme actuel : la notation e_j est explicitement interprétée comme la probabilité d'arrêt pour une urne initialement dans l'état j .

Pour $n \geq 1$, les deux issues du premier tirage forment un système complet d'événements de probabilités strictement positives. Une boule blanche est tirée avec probabilité $n/(2n+2)$; il reste alors une urne dans l'état $n-1$. Le protocole ultérieur est celui d'une expérience démarrant à cet état, donc sa probabilité d'arrêt est e_{n-1} .

Une boule noire est tirée avec probabilité $(n+2)/(2n+2)$; le nouvel état est $n+1$ et la probabilité d'arrêt ultérieur est e_{n+1} .

La formule des probabilités totales donne ainsi :

$$\forall n \geq 1, \quad e_n = \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}.$$

- 3) a) Pour établir la décroissance par récurrence, on réécrit la relation précédente. Pour $n \geq 1$:

$$(n+2)(e_{n+1} - e_n) = n(e_n - e_{n-1}).$$

À l'initialisation, $e_0 = 1 \geq e_1$, car e_1 est une probabilité. Si $e_{n-1} \geq e_n$ pour un certain $n \geq 1$, alors $e_n - e_{n-1} \leq 0$, donc :

$$e_{n+1} - e_n = \frac{n}{n+2}(e_n - e_{n-1}) \leq 0.$$

On obtient $e_n \geq e_{n+1}$, ce qui réalise l'hérédité. Par récurrence, $e_n \geq e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 3) b) Chaque e_n est une probabilité, donc $0 \leq e_n \leq 1$. La suite est décroissante d'après 3) a) et minorée par 0 : elle converge vers une limite appartenant à $[0, 1]$.

Résultat admis dans cette version adaptée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0$. Cette admission figurait déjà dans l'énoncé original; elle sera utilisée en 4) c) pour déterminer e_1 .

- 4) a) On multiplie la relation de la question 2) par $2n+2$. Pour $n \geq 1$:

$$2(n+1)e_n = ne_{n-1} + (n+2)e_{n+1}.$$

En utilisant $u_n = (n+1)e_n$, cette égalité devient $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

4) b) Méthode 1 — Différences consécutives

On réécrit la relation sous la forme $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$. Toutes les différences consécutives sont donc égales à $u_1 - u_0$.

Or $u_0 = e_0 = 1$ et $u_1 = 2e_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en sommant les différences (ou pour $n = 0$ directement), on obtient :

$$u_n = u_0 + n(u_1 - u_0) = 1 + n(2e_1 - 1).$$

Méthode 2 — Récurrence linéaire d'ordre deux

L'équation caractéristique de la récurrence scalaire est $r^2 - 2r + 1 = 0$, soit $(r - 1)^2 = 0$.

La formule des suites récurrentes linéaires à racine réelle double donne

$$u_n = (\alpha + \beta n)1^n = \alpha + \beta n.$$

La condition $u_0 = 1$ impose $\alpha = 1$; la condition $u_1 = 2e_1$ impose $\beta = 2e_1 - 1$. Ainsi, $u_n = 1 + n(2e_1 - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La première méthode repère directement une suite arithmétique ; la seconde replace le calcul dans la méthode générale des récurrences scalaires d'ordre deux à racines réelles.

4) c) Comme $n+1 > 0$, on peut diviser la formule précédente par $n+1$:

$$e_n = \frac{1 + n(2e_1 - 1)}{n+1} = (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $2e_1 - 1$. La limite admise en 3) b) étant nulle, on obtient $2e_1 - 1 = 0$, donc $e_1 = 1/2$.

En reportant cette valeur :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \frac{1}{n+1}.$$

Cette formule donne bien $e_0 = 1$, une suite décroissante de probabilités, et une limite nulle.

Problème

1) a) Sur $[0, 1]$, on a $f(x) = 1 - x$. Ainsi :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

La fonction f est paire, puisque $f(-x) = f(x)$. Par symétrie de l'intégrale :

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

1) b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $1 - |x| \geq 0$; ailleurs, $f(x) = 0$. La fonction est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$: elle l'est sur chaque morceau, et les valeurs aux raccords -1 et 1 sont nulles des deux côtés. Son intégrale converge, puisqu'elle est nulle hors de $[-1, 1]$, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Elle satisfait donc toutes les conditions d'une densité de probabilité.

2) a) Comme f est nulle en dehors de $[-1, 1]$, la fonction $x \mapsto |x|f(x)$ est intégrable : sur ce segment, elle est continue et bornée. Ainsi X admet une espérance.

Méthode 1 — Symétrie

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire, car f est paire. Son intégrale sur le segment symétrique $[-1, 1]$ est donc nulle :

$$E(X) = \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0.$$

Méthode 2 — Intégration par morceaux

On utilise les deux expressions de f :

$$\int_{-1}^0 x(1+x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 x(1-x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

En additionnant, $E(X) = -1/6 + 1/6 = 0$.

La symétrie évite les calculs lorsque la densité est paire ; l'intégration directe fonctionne aussi en l'absence de symétrie.

- 2) b) La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue et nulle en dehors de $[-1, 1]$: son intégrale est finie, donc X admet un moment d'ordre deux et une variance.

Par parité de $x^2 f(x)$:

$$E(X^2) = 2 \int_0^1 x^2(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.$$

La formule de König-Huygens, applicable puisque les moments existent, donne :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}.$$

- 3) On calcule $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ selon la position de x .

Si $x < -1$, l'intégrale est nulle. Si $-1 \leq x \leq 0$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-1}^x (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x = \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}.$$

Si $0 < x \leq 1$, on utilise $F_X(0) = 1/2$:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (1-t) dt = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}.$$

Enfin, si $x > 1$, la densité entière est intégrée et $F_X(x) = 1$. On obtient bien :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les expressions se raccordent en -1 , 0 et 1 , avec les valeurs 0 , $1/2$ et 1 , respectivement.

4) a) Par définition, $Y = |X| \geq 0$. L'événement $[Y \leq x]$ est donc vide pour $x < 0$, et $F_Y(x) = 0$.

4) b) Pour $x \geq 0$, on a $[|X| \leq x] = [-x \leq X \leq x]$. Comme X est à densité, $P(X = -x) = 0$. On peut donc écrire :

$$F_Y(x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x).$$

Cette identité est aussi valable pour $x = 0$: les deux membres sont nuls.

4) c) Pour $0 \leq x \leq 1$, les expressions de F_X donnent :

$$F_Y(x) = \left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) = 2x - x^2.$$

Pour $x > 1$, on a $F_X(x) = 1$ et $F_X(-x) = 0$. Avec la question 4) a), on obtient :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 en dehors, éventuellement, de 0 et 1. Sa dérivée vaut $2(1 - x)$ sur $]0, 1[$, et 0 ailleurs en dehors des raccords. Les valeurs d'une densité en un nombre fini de points n'influencent pas la loi. On peut donc choisir :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est positive ou nulle et possède des limites finies à gauche et à droite aux raccords : elle respecte le cadre des densités étudiées.

4) d) Méthode 1 — Calcul avec la densité de Y

Les fonctions $x \mapsto xg(x)$ et $x \mapsto x^2g(x)$ sont intégrables, car elles sont nulles hors de $[0, 1]$ et bornées sur ce segment. L'espérance et le moment d'ordre deux de Y existent.

$$E(Y) = 2 \int_0^1 x(1 - x) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y^2) = 2 \int_0^1 x^2(1 - x) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

On applique alors König-Huygens :

$$V(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Méthode 2 — Transfert à partir de X

Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont continues et bornées sur le support $[-1, 1]$ de X . Le théorème de transfert est donc applicable et les intégrales correspondantes convergent absolument.

Par parité, puis intégration :

$$E(Y) = E(|X|) = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

L'égalité $Y^2 = X^2$ et la question 2) b) donnent directement $E(Y^2) = E(X^2) = 1/6$. Ainsi, $V(Y) = 1/6 - 1/9 = 1/18$.

La première méthode utilise la loi de Y ; la seconde évite de recalculer son moment d'ordre deux en exploitant la transformation $Y = |X|$.

5) a) Pour $x < 0$, les variables uniformes sont positives ou nulles presque sûrement, donc $F_I(x) = 0$. Pour $x > 1$, $I \leq 1$ presque sûrement, donc $F_I(x) = 1$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on utilise l'identité de l'énoncé, puis l'indépendance de U et V :

$$P(I > x) = P(U > x)P(V > x) = (1-x)^2.$$

Par passage au complémentaire, $F_I(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$. Ainsi :

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5) b) La fonction obtenue en 5) a) est exactement F_Y , calculée en 4) c), pour tout réel x . La fonction de répartition caractérise la loi : I et Y ont donc la même loi.

- 6) Pour calculer la loi du minimum, on utilise les événements complémentaires. Pour $x \in [0, 1]$, l'indépendance mutuelle des X_i entraîne :

$$P(I_n > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = (1 - x)^n.$$

Comme chaque X_i appartient presque sûrement à $[0, 1]$, il en va de même pour I_n . Sa fonction de répartition est donc :

$$F_{I_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soit Z la variable certaine égale à 0. Sa fonction de répartition est $F_Z(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_Z(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Elle est continue en tout point différent de 0.

Pour $x < 0$, on a $F_{I_n}(x) = 0 = F_Z(x)$ pour tout n . Pour $0 < x < 1$, on a $0 < 1 - x < 1$, donc $(1 - x)^n \rightarrow 0$, et ainsi $F_{I_n}(x) \rightarrow 1 = F_Z(x)$. Pour $x \geq 1$, on a déjà $F_{I_n}(x) = 1 = F_Z(x)$.

Les fonctions de répartition convergent donc vers F_Z en tous ses points de continuité. Par définition de la convergence en loi :

$$I_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad P(Z = 0) = 1.$$

Au point 0, on a $F_{I_n}(0) = 0$ alors que $F_Z(0) = 1$. Cela ne pose aucune difficulté : la convergence en loi n'impose pas la convergence des fonctions de répartition aux points de discontinuité de la loi limite. Il s'agit bien ici du minimum I_n , sans facteur n .

- 7) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La question 5) montre que le minimum de deux variables indépendantes uniformes sur $[0, 1]$ possède la loi de Y . On effectue donc deux tirages uniformes indépendants et l'on renvoie leur minimum, en conservant la structure conditionnelle demandée :

Python

```
import numpy.random as rd

def y():
    u = rd.random()
    v = rd.random()
    if u < v:
        return u
    else:
        return v
```

La différence entre $[0, 1[$ et $[0, 1]$ ne change pas la loi uniforme continue : un point isolé a une probabilité nulle. Le cas d'égalité est pris en charge par `else`, qui renvoie alors aussi le minimum.

Code exécuté, avec contrôle des deux branches de comparaison et du cas d'égalité. Les valeurs renvoyées appartiennent à $[0, 1]$. La justification exacte de la loi repose sur la question 5), et non sur une simulation.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2) a) et 2) b) : Code adapté en Python ; les fonctions et le programme de recherche du premier indice conservent la récurrence, l'initialisation et le seuil strict de l'énoncé.
- Exercice 3, 1) b) et 1) c) : l'état 0 est explicitement absorbant, conformément à la branche correspondante du programme original et à la règle d'arrêt de la suite de l'exercice ; cette précision rend la définition de X_2 complète lorsque la première boule est blanche.
- Exercice 3, 1) c) : Code adapté en Python ; `rd.randint(m)` simule un entier uniforme de 0 à $m - 1$, avec conservation des blancs à compléter dans le sujet et des probabilités de chaque branche.

- Exercice 3, 2) : la définition de e_j précise qu'il s'agit d'une probabilité d'arrêt pour l'état initial j , afin de distinguer les expériences selon leur état initial et de justifier les probabilités conditionnelles après le premier tirage.
- Problème, 7) : Code adapté en Python ; la simulation par minimum de deux uniformes indépendantes et les blancs à compléter sont conservés, avec la documentation utile des tirages.