



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EDHEC**

Mathématiques — Option économique

**2012**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

## Exercice 1

---

On admet que, si une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $\ell$ , alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell.$$

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq u_n < 1$ .

1) b) Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

1) c) Dédire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

2) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $v_n = 1 - u_n$ .

2) a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$ .

2) b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de  $v_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

2) c) En déduire que  $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

3) a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n) :` qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

3) b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle on a :  $1 - u_n < 10^{-3}$ .

## Exercice 2

---

- 1) Montrer que, si  $f$  désigne un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  diagonalisable, alors l'endomorphisme  $f^2$  est aussi diagonalisable (on rappelle que  $f^2 = f \circ f$ ).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- 2) a) Déterminer la matrice  $A^2$  puis établir que  $A^4 = I$ . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .
- 2) b) Donner une base  $(u)$  de  $\text{Ker}(g - \text{Id})$ .
- 2) c) Déterminer  $\text{Ker}(g + \text{Id})$ .
- 2) d) En déduire que  $g$  n'est pas diagonalisable.
- 3) a) Résoudre l'équation  $A^2 X = -X$ , d'inconnue le vecteur  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , et en déduire une base  $(v, w)$  de  $\text{Ker}(g^2 + \text{Id})$ .
- 3) b) Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 3) c) Écrire la matrice de  $g^2$  dans la base  $(u, v, w)$  et conclure.

### Exercice 3

---

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $p \in ]0, 1[$  et on pose  $q = 1 - p$ .

On dispose d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité  $p$  et « Face » avec la probabilité  $q$ . Les lancers successifs sont indépendants.

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu « Pile ».
- Soit si l'on a obtenu  $n$  fois « Face ».

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $P_k$  (respectivement  $F_k$ ) l'événement « on obtient Pile » (respectivement « Face ») au  $k$ -ième lancer.

On note  $T_n$  le nombre de lancers effectués,  $X_n$  le nombre de « Pile » obtenus et enfin  $Y_n$  le nombre de « Face » obtenus. On admet que  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que l'on ne cherchera pas à préciser.

1) Loi de  $T_n$ .

1) a) Pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , déterminer, en distinguant le cas  $k = 1$ , la probabilité  $P(T_n = k)$ .

1) b) Déterminer  $P(T_n = n)$ .

1) c) Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1.$$

- 1) d) Établir que  $T_n$  possède une espérance et vérifier que  $E(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .
- 2) Loi de  $X_n$ .
- 2) a) Donner la loi de  $X_n$ .
- 2) b) Vérifier que  $E(X_n) = 1 - q^n$ .
- 3) Loi de  $Y_n$ .
- 3) a) Déterminer, pour tout  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , la probabilité  $P(Y_n = k)$ .
- 3) b) Déterminer  $P(Y_n = n)$ .
- 3) c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$ , puis en déduire  $E(Y_n)$ .
- 4) Montrer que la suite  $(T_n)_{n \geq 2}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $T$  dont on donnera la loi.
- 5) Simulation informatique.

Après l'importation `import numpy.random as rd`, `rd.random()` renvoie une réalisation d'une loi uniforme sur  $[0, 1[$ . Les appels successifs modélisent des tirages indépendants. `input()` lit une chaîne de caractères; `int(...)` et `float(...)` la convertissent respectivement en entier et en nombre réel. `print(t, x, y)` affiche les trois valeurs dans cet ordre.

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$ . Les valeurs saisies vérifient  $n \geq 2$  et  $0 < p < 1$ .

## Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input())
p = float(input())
t = 0
x = 0
y = 0
while x == 0 and t < n:
    ...
    if rd.random() > p:
        ...
    else:
        ...
print(t, x, y)
```

## Problème

---

On désigne par  $\lambda$  un réel strictement positif et on considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}.$$

1) a) Montrer que  $f$  est paire.

1) b) Établir que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge et donner sa valeur.

1) c) Montrer que la fonction  $f$  peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire  $X$  que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

2) a) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ .

2) b) En déduire que la variable aléatoire  $X$  possède une espérance, notée  $E(X)$ , et donner sa valeur.

3) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$  converge et donner sa valeur.

3) b) En déduire que la variable aléatoire  $X$  possède une variance, notée  $V(X)$ , et donner sa valeur.

4) On pose  $Y = X^2$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

4) a) Donner l'expression de la fonction de répartition  $F_Y$  de la variable aléatoire  $Y$  à l'aide de la fonction de répartition  $F_X$  de la variable aléatoire  $X$ .

4) b) Déterminer une densité  $f_Y$  de  $Y$ , puis vérifier que  $Y$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

4) c) Retrouver alors sans calcul la valeur de  $V(X)$ .

5) Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

5) a) On pose  $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$  et on admet que  $W$  est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de  $W$  et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire  $W$ .

5) b) En déduire une fonction Python d'en-tête `def vax(lam):` qui simule la loi de  $|X|$ .

Les commandes `np.log(a)` et `np.sqrt(a)`, après `import numpy as np`, calculent respectivement le logarithme de  $a > 0$  et la racine carrée de  $a \geq 0$ .

5) c) Vérifier que la probabilité que  $X$  prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que  $X$  prenne des valeurs négatives. En déduire une fonction Python,

utilisant `rd.randint(2)`, d'en-tête `def x(lam)` : qui simule la loi de  $X$ .

Après `import numpy.random as rd`, `rd.randint(2)` renvoie 0 ou 1, chacun avec probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le tirage du signe est indépendant du tirage de la valeur absolue.

On suppose, dans la suite, que le paramètre  $\lambda$  est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de  $Y$ . On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  de la loi de  $Y$ . Les variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  sont supposées définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que  $Y$ .

- 6) On considère des réels  $x_1, \dots, x_n$  strictement positifs, ainsi que la fonction  $L$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^n f_Y(x_k).$$

- 6) a) Exprimer  $L(\lambda)$ , puis  $\ln(L(\lambda))$  en fonction de  $\lambda, x_1, \dots, x_n$ .

- 6) b) On considère la fonction  $\varphi$ , définie pour tout réel  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , par :

$$\varphi(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k.$$

Montrer que la fonction  $\varphi$  admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera  $z$  et que l'on exprimera en fonction de  $x_1, \dots, x_n$ . Que peut-on dire de  $z$  pour la fonction  $L$ ?

- 7) On pose dorénavant, toujours avec  $n \geq 2$  :

$$Z_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n Y_k}.$$

Sur l'événement

$$\sum_{k=1}^n Y_k = 0,$$

de probabilité nulle, on convient de poser  $Z_n = 0$ . On admet que  $Z_n$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . La suite  $(Z_n)_{n \geq 2}$  est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\lambda$ .

Pour tout entier  $m \geq 1$ , on note  $f_m$  la fonction donnée, pour  $t > 0$ , par :

$$f_m(t) = \frac{\lambda^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\lambda t}.$$

On pose  $f_m(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,  $f_1(0) = \lambda$ , et  $f_m(0) = 0$  pour  $m \geq 2$ . On admet que

$$\sum_{k=1}^n Y_k$$

admet pour densité  $f_n$ . En particulier,  $f_1$  est la densité exponentielle de paramètre  $\lambda$  et, pour tout  $m \geq 1$ ,  $\int_0^{+\infty} f_m(t) dt = 1$ .

7) a) En remarquant que  $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) dt = 1$ , montrer que  $Z_n$  possède une espérance et que :

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1} \lambda.$$

7) b) Déterminer un estimateur  $Z'_n$ , fonction simple de  $Z_n$ , qui soit un estimateur sans biais de  $\lambda$ .

Un estimateur  $R_n$  de  $\lambda$  est dit sans biais s'il admet une espérance et si  $E(R_n) = \lambda$  pour toute valeur  $\lambda > 0$  du paramètre.