



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2011

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \text{ si } x > 0, \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}.$

1) b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$

1) c) En déduire que la fonction f est continue à droite en 0.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

2) b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1.$

3) b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où, pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

- 1) a) Montrer que f est une application linéaire.
- 1) b) En écrivant, pour tout réel x , $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E .
- 1) c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0 , e_1 et e_2 , puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
- 2) a) Vérifier que $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\text{Im } f$.
- 2) b) Déterminer $\text{Ker } f$.
- 3) a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A .
- 3) b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f .
- 3) c) Vérifier que les sous-espaces propres de f , autres que $\text{Ker } f$, sont inclus dans $\text{Im } f$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

- 1) a) Pour tout i et pour tout k , éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la k -ième épreuve ».

Écrire l'événement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- 1) b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

- 1) c) Comparer $1 - \frac{2}{n}$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

- 2) On pose

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 2) a) Déterminer l'espérance de Y_n , notée $E(Y_n)$.

- 2) b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- 3) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

- 3) a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

- 3) b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

- 3) c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

- 4) Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Après l'importation `import numpy.random as rd`, `rd.randint(n)` renvoie un entier choisi uniformément dans $\{0, \dots, n-1\}$. Les appels successifs correspondent à des choix indépendants. `input(message)` affiche le message et lit une chaîne; `int(...)` la transforme ici en entier; `print(...)` affiche ses arguments. L'utilisateur saisit un entier $n \geq 2$.

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input("Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2 : "))
n1 = 0
x1 = 1
for k in range(n):
    hasard = rd.randint(n) + 1
    if hasard == 1:
        x1 = ...
        n1 = ...
print(x1, n1)
```

Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X \leq x] \cap [Y = 1]) = P(X \leq x)P(Y = 1) \text{ et}$$

$$P([X \leq x] \cap [Y = -1]) = P(X \leq x)P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

- 1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
- 2) En utilisant le système complet d'événements $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

- 1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite. Reconnaître la loi de Z .
- 2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - 2) a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x .
 - 2) b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x , puis reconnaître la loi de Z .

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

1) a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

1) c) Établir qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

2) b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

3) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

3) b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z .

4) a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

4) b) Exprimer Z^2 en fonction de X , puis en déduire de nouveau la variance de Z .

5) Soit U et V des variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

- 5) a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q .
- 5) b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable aléatoire R .
- 5) c) Informatique.

En tenant compte des résultats des questions 5) a) et 5) b), écrire en Python une déclaration de fonction dont l'en-tête est `def z() :` pour qu'elle simule la loi de Z .

Après les importations `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`, `np.log(t)` calcule $\ln(t)$ pour $t > 0$, `rd.random()` simule une variable uniforme sur $[0, 1[$ et `rd.binomial(1, 0.5)` une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Les appels utilisés pour les deux variables donnent des tirages indépendants.