



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2011

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) On utilise la croissance de l'exponentielle et la décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$. Si $0 \leq t \leq x$, alors $1 \leq e^t \leq e^x$, donc $2 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1$. Ces quantités étant strictement positives, leur inversion donne :

$$\frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

- 1) b) Fixons $x > 0$. On multiplie l'inégalité précédente par $t \geq 0$, puis on intègre sur $[0, x]$; les fonctions intégrées sont continues. Il vient :

$$\frac{1}{e^x + 1} \int_0^x t \, dt \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} \, dt \leq \frac{1}{2} \int_0^x t \, dt.$$

Comme $\int_0^x t \, dt = x^2/2$, la multiplication par $2/x^2 > 0$ conduit à :

$$\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

- 1) c) Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $e^x \rightarrow 1$, donc $1/(e^x + 1) \rightarrow 1/2$. Le théorème d'encadrement appliqué à 1) b) donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0).$$

Ainsi, f est continue à droite en 0.

- 2) a) Posons, pour $x \geq 0$, $H(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} \, dt$. L'intégrande étant continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental de l'analyse donne $H'(x) = x/(e^x + 1)$ sur $]0, +\infty[$. Cette dérivée est continue, donc H est de classe C^1 sur cet intervalle.

Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = 2x^{-2}H(x)$ est alors de classe C^1 , et :

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}H(x) + \frac{2}{x^2} \frac{x}{e^x + 1} = -\frac{4}{x^3} \left(H(x) - \frac{x^2}{2(e^x + 1)} \right).$$

On peut donc choisir, pour $x \geq 0$:

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt - \frac{x^2}{2(e^x + 1)}.$$

Cette définition donne notamment $g(0) = 0$ et une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) b) Pour $x > 0$, dérivons l'expression précédente :

$$g'(x) = \frac{x}{e^x + 1} - \left(\frac{x}{e^x + 1} - \frac{x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2} \right) = \frac{x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2} > 0.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Sa continuité en 0 et $g(0) = 0$ montrent que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Comme $-4/x^3 < 0$, on obtient $f'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$: f y est strictement décroissante.

Il reste à inclure le point 0. Pour $x > 0$, $f(x) \leq 1/2 = f(0)$ d'après 1) b). On a donc bien la décroissance sur tout $\mathbb{R}_+$. Elle est même stricte : sur $]0, x]$, $1/(e^t + 1) < 1/2$, et l'intégration de $t/(e^t + 1) < t/2$ donne $f(x) < f(0)$.

3) a) Pour $t \geq 0$, l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ résulte, par exemple, de la convexité de l'exponentielle et de sa tangente en 0. Par conséquent :

$$0 \leq \frac{t}{e^t + 1} \leq \frac{t}{t + 2} \leq 1.$$

Toutes les divisions portent sur des nombres strictement positifs. L'inégalité demandée est établie.

3) b) Pour $x > 0$, la positivité de l'intégrande et 3) a) donnent :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x 1 dt = x.$$

D'où $0 \leq f(x) \leq 2/x$. Comme $2/x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement fournit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 2

1) a) Soient $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La linéarité de la dérivation donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f(\alpha P + \beta Q))(x) = 2x(\alpha P(x) + \beta Q(x)) - (x^2 - 1)(\alpha P'(x) + \beta Q'(x)).$$

En regroupant, cette expression vaut $\alpha(f(P))(x) + \beta(f(Q))(x)$. On a donc $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$: l'application est linéaire. On vérifie à la question suivante que ses valeurs appartiennent à E .

1) b) Écrivons $P(x) = a + bx + cx^2$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $P'(x) = b + 2cx$, et :

$$(f(P))(x) = 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 - (bx^2 + 2cx^3 - b - 2cx).$$

Les termes de degré 3 s'annulent, ce qui donne :

$$(f(P))(x) = b + 2(a + c)x + bx^2.$$

Cette fonction polynomiale appartient à E . Avec la linéarité prouvée en 1) a), cela établit que f est un endomorphisme de E .

1) c) On applique la formule précédente aux trois polynômes de la base :

$$f(e_0) = 2e_1, \quad f(e_1) = e_0 + e_2, \quad f(e_2) = 2e_1.$$

Les colonnes de la matrice cherchée sont leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) a) La formule de 1) b) montre que tout élément de $\text{Im } f$ s'écrit $b(e_0 + e_2) + 2(a + c)e_1$.

Ainsi, $\text{Im } f \subset \text{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$.

Réciproquement, $e_1 = f(e_0)/2$ et $e_0 + e_2 = f(e_1)$ appartiennent à l'image. Par stabilité de l'image par combinaison linéaire, on obtient l'inclusion réciproque, donc :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_0 + e_2).$$

Si $\alpha e_1 + \beta(e_0 + e_2) = 0$, l'identification des coordonnées dans $\mathcal{B}$ donne $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. La famille est libre et génératrice de l'image ; sa dimension est donc 2.

2) b) Méthode 1 — Résolution directe de l'équation du noyau

Pour $P = a + bx + cx^2$, la formule de 1) b) et l'unicité des coefficients d'un polynôme donnent :

$$f(P) = 0 \iff b = 0 \text{ et } a + c = 0.$$

Ainsi $P = a(1 - x^2)$, avec $a \in \mathbb{R}$, et :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(e_0 - e_2).$$

Méthode 2 — Utilisation du théorème du rang

L'endomorphisme f agit sur l'espace E de dimension 3, et son image est de dimension 2. Le théorème du rang donne donc $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$.

D'après 1) c), $f(e_0 - e_2) = 2e_1 - 2e_1 = 0$. Comme $e_0 - e_2$ est non nul, il engendre une droite contenue dans le noyau, lequel est aussi de dimension 1. On conclut à la même égalité : $\text{Ker } f = \text{Vect}(e_0 - e_2)$.

La première méthode décrit directement toutes les solutions ; la seconde est plus rapide lorsque le rang est déjà connu et qu'un vecteur non nul du noyau est disponible.

3) a) On cherche les réels λ tels que $AV = \lambda V$ possède une solution $V = {}^t(a, b, c)$ non nulle. Le système à résoudre par élimination de Gauss est :

$$\begin{cases} b - \lambda a = 0, \\ 2a - \lambda b + 2c = 0, \\ b - \lambda c = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, la première équation donne $b = 0$, puis la deuxième donne $c = -a$; la troisième est alors satisfaite. Les solutions $(a, 0, -a)$ sont non nulles pour $a \neq 0$, donc 0 est valeur propre.

Si $\lambda \neq 0$, on soustrait la première équation à la troisième : on obtient $\lambda(a - c) = 0$, donc $c = a$. On élimine ensuite b à l'aide de la première équation, soit $b = \lambda a$. La deuxième équation devient :

$$(4 - \lambda^2)a = 0.$$

Si $a = 0$, alors $b = c = 0$, ce qui est exclu. On doit donc avoir $\lambda^2 = 4$, soit $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$. Réciproquement, pour chacune de ces deux valeurs, $(1, \lambda, 1)$ est une solution non nulle du système.

Ainsi, les valeurs propres de A sont exactement $-2, 0$ et 2 . La recherche a utilisé uniquement l'élimination des inconnues, sans calcul de déterminant.

3) b) Les coordonnées déterminées en 3) a) correspondent aux polynômes suivants :

$$E_0(f) = \text{Vect}(1 - x^2), \quad E_2(f) = \text{Vect}(1 + 2x + x^2), \quad E_{-2}(f) = \text{Vect}(1 - 2x + x^2).$$

Ici, $E_\lambda(f)$ désigne le sous-espace propre $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. On peut aussi écrire $E_2(f) = \text{Vect}((x + 1)^2)$ et $E_{-2}(f) = \text{Vect}((x - 1)^2)$.

Les trois polynômes générateurs sont des vecteurs propres non nuls associés à trois valeurs propres distinctes. Ils forment donc une famille libre ; puisque $\dim E = 3$, cette famille est une base de E . Ainsi, f est diagonalisable.

3) c) Méthode 1 — Expression dans les générateurs de l'image

On a $(x + 1)^2 = (e_0 + e_2) + 2e_1$ et $(x - 1)^2 = (e_0 + e_2) - 2e_1$. Ces deux polynômes appartiennent donc à $\text{Im } f$ d'après 2) a). Leurs multiples aussi ; ainsi $E_2(f) \subset \text{Im } f$ et $E_{-2}(f) \subset \text{Im } f$.

Méthode 2 — Exploitation d'une valeur propre non nulle

Si $P \in E_\lambda(f)$ et $\lambda \neq 0$, alors $f(P) = \lambda P$, donc $P = f(P/\lambda)$. Cela montre directement que P appartient à l'image de f . En appliquant cette observation à $\lambda = 2$ et $\lambda = -2$, on retrouve les deux inclusions demandées.

La première méthode utilise les descriptions explicites obtenues dans l'exercice ; la seconde met en évidence le mécanisme qui fonctionne pour tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle.

Exercice 3

- 1) a) L'urne i contient encore ses n boules exactement lorsqu'elle n'a jamais été choisie. Ainsi :

$$[X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k}}.$$

À chaque épreuve, le choix est uniforme parmi les n urnes ; par conséquent $P(\overline{U_{i,k}}) = 1 - 1/n$. Les choix des urnes à des épreuves distinctes sont indépendants, donc les événements de l'intersection sont mutuellement indépendants. On obtient :

$$P(X_i = 1) = \prod_{k=1}^n P(\overline{U_{i,k}}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- 1) b) Pour $i \neq j$, l'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ signifie qu'aucune des deux urnes i, j n'a été choisie pendant les n épreuves.

À chaque épreuve, ces deux choix sont incompatibles et ont chacun probabilité $1/n$. La probabilité de les éviter tous les deux vaut donc $1 - 2/n$. L'indépendance des choix entre les épreuves conduit à :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

Pour $n = 2$, cette probabilité vaut 0 : les deux urnes ne peuvent pas rester toutes deux intactes après deux prélèvements.

1) c) Pour $n \geq 2$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 - \frac{2}{n} \geq 0.$$

La fonction $t \mapsto t^n$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = P(X_i = 1)P(X_j = 1).$$

D'après 1) b), le membre de gauche est la probabilité de l'intersection. Celle-ci diffère du produit des probabilités ; donc les événements $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ ne sont pas indépendants. Les variables X_i et X_j ne le sont donc pas non plus.

2) a) Chaque variable X_i prend les valeurs 0, 1 : elle est de Bernoulli de paramètre $p_n = (1 - 1/n)^n$ et admet une espérance égale à p_n .

La somme Y_n étant finie, elle admet également une espérance. La linéarité, qui ne requiert pas l'indépendance, donne :

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

2) b) On justifie la limite de la puissance en prenant son logarithme. Le développement limité usuel $\ln(1 + h) = h + o(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$ donne :

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + o(1) \rightarrow -1.$$

Par continuité de l'exponentielle, $(1 - 1/n)^n \rightarrow e^{-1}$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n} = \frac{1}{e}, \quad E(Y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

La dernière affirmation signifie que le quotient de $E(Y_n)$ par n/e tend vers 1 ; la constante $1/e$ est strictement positive.

- 3) a) À chaque épreuve, l'urne i est choisie avec probabilité $1/n$, indépendamment des autres épreuves. Le nombre de boules manquantes est exactement le nombre de ces choix parmi les n épreuves. Donc :

$$N_i \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right), \quad E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

- 3) b) Si $N_i = 0$, alors le produit $N_i X_i$ vaut 0. Si $N_i \geq 1$, l'urne i a perdu une boule au moins, donc $X_i = 0$; le produit vaut encore 0.

Ainsi, pour toute issue, $N_i X_i = 0$: c'est la variable certaine nulle.

- 3) c) Méthode 1 — Comparaison de probabilités d'événements

Les événements $[N_i = 0]$ et $[X_i = 1]$ sont identiques. Leur probabilité commune est $p_n = (1 - 1/n)^n$, avec $0 < p_n < 1$ pour $n \geq 2$. Ainsi :

$$P([N_i = 0] \cap [X_i = 1]) = p_n \neq p_n^2 = P(N_i = 0)P(X_i = 1).$$

Les variables N_i et X_i ne sont donc pas indépendantes.

Méthode 2 — Contradiction avec l'espérance du produit

Les deux variables sont bornées et admettent donc une espérance. Si elles étaient indépendantes, la formule de l'espérance du produit de variables discrètes indépendantes donnerait :

$$E(N_i X_i) = E(N_i)E(X_i) = 1 \times p_n = p_n > 0.$$

Or 3) b) donne $N_i X_i = 0$, donc $E(N_i X_i) = 0$. Cette contradiction établit de nouveau la non-indépendance.

La première méthode peut s'utiliser sans calcul de moments ; la seconde exploite les questions précédentes et montre qu'une dépendance peut être détectée par le produit des espérances.

4) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La variable n_1 compte les choix de l'urne numéro 1. La variable x_1 , initialisée à 1, devient 0 dès que cette urne a été choisie et reste ensuite égale à 0. Le programme complété est :

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input("Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2 : "))
n1 = 0
x1 = 1
for k in range(n):
    hasard = rd.randint(n) + 1
    if hasard == 1:
        x1 = 0
        n1 = n1 + 1
print(x1, n1)
```

La boucle réalise exactement n choix ; $\text{rd.randint}(n) + 1$ est uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Chaque sélection de l'urne 1 augmente le nombre de boules manquantes d'une unité. À la sortie, n_1 vaut donc N_1 et x_1 vaut X_1 ; on a toujours $x_1 == \text{int}(n_1 == 0)$.

Ce bloc a été exécuté avec des saisies entières $n \geq 2$ et ses deux branches ont été contrôlées avec des tirages imposés. Ces contrôles portent sur le programme ; les lois exactes ont été démontrées aux questions précédentes.

Problème

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1) Si T suit la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$, alors :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Si T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ces expressions sont continues sur $\mathbb{R}$, notamment aux bornes des intervalles indiqués.

2) Le système $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$ est complet et ses deux événements ont probabilité $1/2$. Par la formule des probabilités totales et l'indépendance de X, Y :

$$F_Z(x) = P([XY \leq x] \cap [Y = 1]) + P([XY \leq x] \cap [Y = -1]).$$

Sur $[Y = 1]$, l'inégalité est $X \leq x$; sur $[Y = -1]$, elle est $X \geq -x$. Ainsi :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x).$$

Comme X possède une densité, $P(X = -x) = 0$. On a donc $P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x)$, y compris aux valeurs particulières de x . On conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

- 1) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On utilise la propriété du programme $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, valable pour tout réel x :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2} (\Phi(x) - (1 - \Phi(x)) + 1) = \Phi(x).$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, Z suit donc également la loi normale centrée réduite : $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- 2) a) Pour $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$, la fonction de répartition vaut 0 à gauche de 0, t pour $0 \leq t \leq 1$ et 1 à droite de 1. En remplaçant t par $-x$, on obtient :

$$F_X(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Les valeurs aux raccordements sont $F_X(1) = 1$ pour $x = -1$ et $F_X(0) = 0$ pour $x = 0$.

- 2) b) On applique la formule de la partie 1. Si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = 1$, donc $F_Z(x) = 0$. Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = -x$, d'où $F_Z(x) = (1 + x)/2$.

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $F_X(x) = x$ et $F_X(-x) = 0$, ce qui donne encore $F_Z(x) = (1 + x)/2$. Enfin, pour $x > 1$, les deux termes sont respectivement 1 et 0, donc $F_Z(x) = 1$.

Ainsi :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Par conséquent, $Z \sim \mathcal{U}([-1, 1])$.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

1) a) Si $x \geq 0$, on a $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ et $F_X(-x) = 0$, y compris à $x = 0$. La formule de la partie 1 donne alors $F_Z(x) = 1 - e^{-x}/2$.

Si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$ et $F_X(-x) = 1 - e^x$, d'où $F_Z(x) = e^x/2$. Ainsi :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) b) Les deux expressions précédentes sont continues sur leurs intervalles respectifs. Au point 0, la limite à gauche est $1/2$ et la valeur, ainsi que la limite à droite, est $1 - 1/2 = 1/2$. Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La caractérisation par la fonction de répartition établit donc que Z est une variable aléatoire à densité.

1) c) Pour $x < 0$, la dérivée de F_Z vaut $e^x/2$; pour $x > 0$, elle vaut $e^{-x}/2$. Les deux expressions sont positives et admettent la même limite finie $1/2$ en 0. On peut donc choisir la densité continue :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Elle coïncide avec la dérivée de F_Z pour tout $x \neq 0$; la valeur positive choisie en 0 ne modifie pas la loi.

2) a) Méthode 1 — Espérance de la loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre 1 possède une espérance égale à 1. Sa densité sur $\mathbb{R}_+$ est $x \mapsto e^{-x}$. Par la formule de l'espérance d'une variable à densité, l'intégrale positive

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \text{ converge et vaut } E(X) = 1.$$

Méthode 2 — Intégration par parties sur un segment

Pour $T > 0$, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[0, T]$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^T x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^T + \int_0^T e^{-x} dx = 1 - (T + 1)e^{-T}.$$

Par croissance comparée, $(T + 1)e^{-T} \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. On obtient donc, en prenant la limite des intégrales sur segment :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

La première méthode réutilise une loi usuelle ; la seconde établit directement la convergence et prépare les calculs de moments plus élevés.

2) b) Pour tout réel x , $|-x| = |x|$, donc $f_Z(-x) = f_Z(x)$: la densité est paire.

Avant d'utiliser l'annulation par parité, vérifions la convergence absolue. Par un changement de variable affine $u = -x$ sur les segments négatifs, puis passage à la limite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_Z(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{-x} dx = 1 < +\infty.$$

L'espérance de Z existe donc. La fonction $x \mapsto x f_Z(x)$ est impaire et absolument intégrable, ce qui permet d'additionner les deux intégrales opposées sur les demi-droites. On en déduit :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = 0.$$

3) a) Méthode 1 — Moment d'ordre deux d'une exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(1)$ admet une espérance 1 et une variance 1. La formule de König-Huygens donne $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 2$. Comme X a pour densité e^{-x} sur $\mathbb{R}_+$, le transfert donne :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = E(X^2) = 2.$$

Méthode 2 — Intégration par parties sur un segment

Pour $T > 0$, une intégration par parties, justifiée par la régularité C^1 des fonctions en jeu sur $[0, T]$, donne :

$$\int_0^T x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^T + 2 \int_0^T x e^{-x} dx = -T^2 e^{-T} + 2(1 - (T+1)e^{-T}).$$

La croissance comparée assure $T^2 e^{-T} \rightarrow 0$ et $(T+1)e^{-T} \rightarrow 0$. En passant à la limite, on prouve la convergence de l'intégrale et sa valeur 2.

La méthode probabiliste est immédiate lorsque les moments usuels sont connus ; l'intégration par parties permet de les retrouver par le calcul.

3) b) L'intégrande $x^2 f_Z(x)$ est positive et paire. La question précédente permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-x} dx = 2 < +\infty.$$

Ainsi, Z possède un moment d'ordre deux égal à 2, donc une variance. Avec $E(Z) = 0$ et König-Huygens :

$$E(Z^2) = 2, \quad V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 2.$$

4) a) La loi de X est exponentielle de paramètre 1, donc $E(X) = 1$. La variable Y , bornée, possède une espérance :

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0.$$

On obtient donc $E(X)E(Y) = 0 = E(Z) = E(XY)$. Cet exemple retrouve l'égalité entre l'espérance du produit de variables indépendantes et le produit de leurs espérances. Ici, cette égalité est constatée grâce aux calculs particuliers déjà justifiés ; aucune théorie générale supplémentaire des couples à densité n'a été utilisée.

- 4) b) Puisque Y ne prend que les valeurs -1 et 1 , on a $Y^2 = 1$ pour toute issue. Par conséquent :

$$Z^2 = X^2 Y^2 = X^2.$$

La variable X exponentielle de paramètre 1 possède un moment d'ordre deux égal à $1 + 1^2 = 2$. Ainsi $E(Z^2) = E(X^2) = 2$; avec $E(Z) = 0$, on retrouve $V(Z) = 2$.

- 5) a) Question adaptée au programme actuel pour le préambule de 5) : l'indépendance de U et V y est explicitée ; le calcul de cette sous-question est inchangé.

Comme $0 \leq V < 1$, on a $0 < 1 - V \leq 1$, donc $Q = -\ln(1 - V) \geq 0$. Ainsi, $F_Q(x) = 0$ pour $x < 0$.

Pour $x \geq 0$, la monotonie du logarithme et celle de l'exponentielle permettent les équivalences :

$$Q \leq x \iff \ln(1 - V) \geq -x \iff 1 - V \geq e^{-x} \iff V \leq 1 - e^{-x}.$$

Le nombre $1 - e^{-x}$ appartient à $[0, 1[$. La fonction de répartition de V uniforme donne donc :

$$F_Q(x) = P(V \leq 1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}.$$

Finalement $F_Q(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_Q(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x \geq 0$. C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, donc $Q \sim \mathcal{E}(1)$.

- 5) b) Une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$ prend les valeurs $0, 1$, chacune avec probabilité $1/2$. La transformation $R = 2U - 1$ envoie 0 sur -1 et 1 sur 1 . Ainsi :

$$R(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P(R = -1) = P(R = 1) = \frac{1}{2}.$$

La variable R a donc la même loi que Y .

5) c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les variables U et V étant indépendantes dans le sujet adapté, leurs fonctions $R = 2U - 1$ et $Q = -\ln(1 - V)$ sont indépendantes par le lemme des coalitions. D'après 5) a) et 5) b), elles ont les mêmes lois respectives que Y et X . Le produit RQ suit donc la loi de Z ; on peut aussi appliquer directement la formule de la partie 1 à ce nouveau couple.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def z():
    u = rd.binomial(1, 0.5)
    v = rd.random()
    q = -np.log(1 - v)
    r = 2 * u - 1
    return r * q
```

La variable u vaut 0 ou 1, la variable v appartient à $[0, 1[$; ainsi $1 - v$ est strictement positif et le logarithme est défini. q simule Q , r simule R , et la valeur renvoyée est leur produit. Les deux appels aléatoires fournissent les tirages indépendants nécessaires.

Ce bloc a été exécuté et les deux valeurs du signe ont été contrôlées avec des tirages imposés, ainsi que le cas $v = 0$. Des simulations supplémentaires ont été effectuées pour vérifier le comportement numérique; elles ne remplacent pas la démonstration exacte de la loi.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, 4) : Code adapté en Python, avec conservation des deux instructions à compléter dans le sujet. Documentation de `rd.randint`, de la lecture d'un entier et de l'affichage ; les bornes et les n répétitions de l'algorithme original sont conservées.
- Problème, partie 3, 5) : indépendance de U et V explicitement ajoutée au préambule, car leurs seules lois marginales ne suffisent pas à garantir que le produit simulé en 5) c) ait la loi de Z .
- Problème, partie 3, 5) c) : Code adapté en Python ; en-tête de fonction remplacé par `def z() :` et commandes numériques documentées dans le sujet. La construction par un signe symétrique indépendant et une variable exponentielle est conservée.