



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

1) Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

3) Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de f . Calculer la matrice hessienne en chaque point critique et étudier les signes de ses valeurs propres. Vérifier que ce critère ne permet pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

5) a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.

5) b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$g(x, y) = 2 \ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, g(x, y) \geq 2 \ln(2).$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

- 1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
- 2) b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
- 3) a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
- 3) b) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
- 4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
- 5) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
- 5) a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a :

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

5) b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ln \left(\frac{\ell}{u_n} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right).$$

5) c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3) a), que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ln \left(\frac{\ell}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

5) d) Dédurre de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell (1 - e^{-1/2^n}).$$

5) e) Justifier que, pour tout réel x , on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}.$$

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) a) Vérifier que f est une fonction paire.

1) b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X .

- 2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
- 3) On pose $Y = \ln(|X|)$ sur l'événement $[|X| \geq 1]$, de probabilité 1, et l'on fixe $Y = 0$ sur l'événement contraire. On admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.
- 3) a) Montrer que, pour tout réel x , on a : $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
- 3) b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y , que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
- 4) a) Montrer que, si x est positif ou nul, alors $1 - e^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - e^{-x}$ est strictement négatif.
- 4) b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z .
- 4) c) Simulation informatique de la loi de Y .

Après les imports ci-dessous, `rd.random()` simule la loi uniforme sur $[0, 1[$ et `np.log(t)` calcule $\ln(t)$ pour $t > 0$.

Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def expo():
    return ...
```

Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

Partie 1 : étude de f

- 1) a) Écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.
- 1) b) Déterminer la dimension de $\text{Im } f$ puis celle de $\text{Ker } f$.
- 1) c) Donner alors une base de $\text{Ker } f$, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.
- 1) d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.
- 1) e) En déduire que f est diagonalisable.
- 2) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

- 2) b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1} .
- 2) c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j , on a : $M^j = PD^jP^{-1}$.
- 2) d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j .
Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie après le k -ième tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le k -ième tirage ($k \in \mathbb{N}^*$), si X_k a pris la valeur 1, on procède au $(k + 1)$ -ième tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce tirage. Si X_k a pris une valeur j différente de 1, on procède également au $(k + 1)$ -ième tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j , et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_1 .

2) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

Après l'import `import numpy.random as rd`, `rd.randint(n)` renvoie de façon équiprobable un entier compris entre 0 et $n - 1$; des appels successifs correspondent à des tirages indépendants. `int(input())` lit au clavier un entier. Pour des entiers $a \leq b$, `range(a, b)` parcourt les entiers de a à $b - 1$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans

cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable aléatoire X_k , l'entier naturel $k \geq 1$ étant entré au clavier par l'utilisateur.

Python

```
import numpy.random as rd

k = int(input())
X = rd.randint(3) + 1
for i in range(2, k + 1):
    tirage = rd.randint(3) + 1
    if X == 1:
        X = ...
    elif tirage != X:
        X = ...
print(X)
```

3) On note U_k la matrice à trois lignes et une colonne dont l'élément de la i -ième ligne est $P(X_k = i)$.

3) a) Déterminer les probabilités $P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. On pourra d'abord vérifier que chacun des événements $[X_k = j]$ est de probabilité strictement positive.

3) b) On admet que $\{[X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\}$ est un système complet d'événements.

Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $U_{k+1} = AU_k$.

On utilise ici des vecteurs colonnes. Avec des vecteurs lignes $V_k = {}^tU_k$, la matrice de transition est ${}^tA$ et la même relation s'écrit $V_{k+1} = V_k {}^tA$.

- 3) c) Montrer qu'en posant la matrice auxiliaire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on

$$a : U_k = A^k U_0.$$

- 4) a) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j.$$

- 4) b) En déduire les trois éléments de la première colonne de la matrice A^k , puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right), \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right). \end{aligned}$$

- 4) c) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

- 5) a) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k .

- 5) b) Écrire une fonction Python, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.