



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

On travaille sur l'ouvert $O =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. En particulier, tous les dénominateurs utilisés sont strictement positifs.

1) Développons le produit définissant f :

$$f(x, y) = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{y} = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

En mettant les termes au même dénominateur, on obtient aussi :

$$f(x, y) = \frac{2xy + y^2 + x^2}{xy} = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

Les deux identités sont donc valables pour tout $(x, y) \in O$.

2) Les fonctions coordonnées sont de classe C^∞ , et les fonctions inverses qui interviennent sont de classe C^∞ lorsque leur argument est strictement positif. Les opérations sur ces fonctions montrent que f est de classe C^∞ , donc C^2 , sur l'ouvert O .

3) Cherchons les points où le gradient s'annule. La première expression de la question 1) donne :

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x y^2}.$$

Le gradient est nul si et seulement si $x^2 = y^2$. Comme $x > 0$ et $y > 0$, cela équivaut à $x = y$. L'ensemble des points critiques est donc :

$$\{(a, a) : a > 0\}.$$

Cet ensemble contient une infinité de points.

4) Question adaptée au programme actuel : le calcul des dérivées secondes est prolongé par l'étude des valeurs propres de la hessienne.

En dérivant les expressions précédentes, on obtient :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \frac{2y}{x^3}, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \frac{2x}{y^3}, \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

Pour $a > 0$, la hessienne au point critique (a, a) est donc :

$$H_f(a, a) = \frac{2}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La multiplication par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donne respectivement le vecteur nul et

$$\frac{4}{a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$. Les valeurs propres sont donc 0 et $4/a^2 > 0$.

La fonction est bien C^2 sur un ouvert contenant le point critique, mais l'une des valeurs propres est nulle. Le critère suffisant par les signes des valeurs propres ne permet donc pas de conclure. La présence d'une valeur propre positive et d'une valeur propre nulle n'exclut pas un minimum : une étude directe est nécessaire.

5) a) Utilisons le carré d'une différence :

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0.$$

Ainsi $(x + y)^2 \geq 4xy$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

5) b) Méthode 1 — Utiliser la comparaison demandée

Puisque $xy > 0$, la question précédente et la seconde expression de f donnent :

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy} \geq 4.$$

Pour tout $a > 0$, $f(a, a) = 4$. Le minimum global est donc 4, atteint exactement aux points critiques (a, a) , $a > 0$.

Ces minima sont également locaux, mais ne sont pas stricts : tout voisinage de (a, a) contient d'autres points (b, b) , avec $b > 0$, où f vaut encore 4.

Méthode 2 — Réduire à une fonction d'une variable

Posons $t = x/y > 0$. Alors $f(x, y) = \varphi(t)$, où $\varphi(t) = 2 + t + 1/t$. Sur $]0, +\infty[$,

$$\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t - 1)(t + 1)}{t^2}.$$

La fonction est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en $t = 1$, de valeur $\varphi(1) = 4$. Cela redonne $x = y$ et le même minimum global. La première méthode exploite l'inégalité proposée ; la seconde montre comment un quotient peut ramener une étude de deux variables à une étude de variations.

6) Relions les deux fonctions à l'aide des propriétés du logarithme. Sur O , toutes les quantités sont positives et :

$$g(x, y) = \ln \left(\frac{(x + y)^2}{xy} \right) = \ln(f(x, y)).$$

Le logarithme est croissant sur $]0, +\infty[$. Comme $f(x, y) \geq 4$, on en déduit :

$$g(x, y) \geq \ln(4) = 2 \ln(2).$$

L'égalité a lieu exactement lorsque $x = y$.

Exercice 2

Tous les facteurs définissant u_n sont strictement positifs ; les logarithmes de u_n sont donc bien définis.

1) Calculons les trois premiers produits :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 2 \times \frac{3}{2} = 3, \quad u_2 = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$

2) a) Le facteur correspondant à $k = 0$ vaut 2 et tous les autres facteurs sont supérieurs ou égaux à 1. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

2) b) En isolant le dernier facteur du produit, on obtient :

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_n / 2^{n+1} > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

3) a) Méthode 1 — Étudier une différence

La fonction $h(x) = x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et vérifie :

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Elle est décroissante sur $] -1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Son minimum vaut $h(0) = 0$.

Donc $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, avec égalité seulement en 0.

Méthode 2 — Utiliser la concavité et la tangente

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée seconde vaut $-1/(1+x)^2 < 0$. Elle est donc concave et son graphe est situé sous toute tangente. Sa tangente en 0 a pour équation $y = x$, puisque sa valeur en 0 est 0 et sa dérivée en 0 vaut 1. On obtient encore $\ln(1+x) \leq x$.

La première méthode permet de retrouver l'inégalité par les variations ; la seconde est utile pour reconnaître rapidement les inégalités issues de la convexité ou de la concavité.

- 3) b) Le logarithme transforme le produit fini en somme. En appliquant 3) a) à chaque $2^{-k} > 0$, on obtient :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + 2^{-k}) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} = \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - 1/2} = 2 - 2^{-n} \leq 2.$$

En particulier, $\ln(u_n) \leq 2$ pour tout n , avec le majorant plus précis $2 - 2^{-n}$.

- 4) Méthode 1 — Appliquer le théorème de la limite monotone à u_n

La suite (u_n) est croissante. Par croissance de l'exponentielle et par 3) b), $u_n \leq e^2$. Le théorème de la limite monotone fournit donc une limite réelle ℓ . Les inégalités $2 \leq u_n \leq e^2$ passent à la limite et donnent $2 \leq \ell \leq e^2$.

Méthode 2 — Étudier d'abord le logarithme du produit

Posons $w_n = \ln(u_n)$. On a $w_{n+1} - w_n = \ln(1 + 2^{-(n+1)}) > 0$, et $\ln 2 \leq w_n \leq 2$. La suite (w_n) est donc croissante et majorée ; elle converge vers un réel $L \in [\ln 2, 2]$. La continuité de l'exponentielle entraîne $u_n = e^{w_n} \rightarrow e^L$. On pose $\ell = e^L \in [2, e^2]$.

Les deux approches donnent la convergence ; le passage par les logarithmes est particulièrement utile lorsque la suite est définie par un produit.

- 5) a) Comme $u_n \rightarrow \ell$ et $\ell \geq 2 > 0$, la continuité du logarithme donne $\ln(u_n) \rightarrow \ln(\ell)$.
Or :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + 2^{-k}).$$

Les sommes partielles de la série convergent donc vers $\ln(\ell)$. Par définition de la somme

d'une série convergente,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + 2^{-k}) = \ln(\ell).$$

5) b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour $N \geq n + 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^N \ln(1 + 2^{-k}) = \ln(u_N) - \ln(u_n).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, la somme converge vers $\ln(\ell) - \ln(u_n)$. Comme ℓ et u_n sont positifs, cette différence est $\ln(\ell/u_n)$. Cela prouve l'identité demandée.

5) c) Les termes de la série précédente sont positifs et majorés par 2^{-k} d'après 3) a).

Pour chaque somme finie, puis en passant à la limite :

$$0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-(n+1)}}{1 - 1/2} = 2^{-n}.$$

La série géométrique utilisée converge puisque sa raison vaut $1/2$.

5) d) L'inégalité précédente s'écrit aussi :

$$-2^{-n} \leq \ln\left(\frac{u_n}{\ell}\right) \leq 0.$$

La croissance de l'exponentielle donne $e^{-2^{-n}} \leq u_n/\ell \leq 1$. En retranchant chaque membre à 1 et en multipliant par $\ell > 0$, on obtient :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-2^{-n}}).$$

5) e) Pour établir l'inégalité sur tout $\mathbb{R}$, considérons $h(x) = e^{-x} - 1 + x$. Sa dérivée est

$h'(x) = 1 - e^{-x}$, négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$. Son minimum vaut

$h(0) = 0$. Donc $e^{-x} - 1 + x \geq 0$, c'est-à-dire $1 - e^{-x} \leq x$.

En prenant $x = 2^{-n}$ dans cette inégalité et en utilisant 5) d), on obtient :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell 2^{-n}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, les sommes partielles vérifient donc :

$$0 \leq \sum_{n=0}^N (\ell - u_n) \leq \ell \sum_{n=0}^N 2^{-n} \leq 2\ell.$$

Ces sommes partielles sont croissantes puisque leurs termes sont positifs, et majorées. Elles convergent par le théorème de la limite monotone. Ainsi la série de terme général $\ell - u_n$ est convergente. Cet argument par sommes partielles établit directement la comparaison nécessaire.

Exercice 3

1) a) Si $|x| \geq 1$, alors $|-x| \geq 1$ et $f(-x) = 1/(2(-x)^2) = f(x)$. Si $|x| < 1$, $f(x) = f(-x) = 0$. Ainsi f est paire sur $\mathbb{R}$.

1) b) Vérifions les propriétés d'une densité. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. En chacun des deux points exclus, les limites à gauche et à droite sont finies.

Pour $R > 1$, une primitive sur $[1, R]$ donne :

$$\int_1^R \frac{1}{2x^2} dx = \left[-\frac{1}{2x} \right]_1^R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par parité, l'intégrale sur $] -\infty, -1]$ converge et vaut également $1/2$. Sur $] -1, 1[$, la fonction est nulle. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge donc et vaut 1. Les conditions sont réunies : f est une densité de probabilité.

2) L'existence d'une espérance impose la convergence absolue de l'intégrale de $xf(x)$.
Or, pour $R > 1$,

$$\int_1^R |x|f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln R \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale de $|x|f(x)$ diverge donc, et X n'admet pas d'espérance. La symétrie de la densité ne permet pas d'attribuer la valeur 0 à une espérance qui n'existe pas.

- 3) a) Question adaptée au programme actuel : la définition de Y a été précisée sur l'événement de probabilité nulle où $|X| < 1$, afin que le logarithme soit toujours utilisé avec un argument positif. Cela ne change pas sa loi.

En effet $P(|X| < 1) = \int_{-1}^1 f(t) dt = 0$. Pour tout réel x , à un événement de probabilité nulle près,

$$[Y \leq x] = [\ln |X| \leq x] = [|X| \leq e^x] = [-e^x \leq X \leq e^x].$$

Comme X admet une densité, $P(X = -e^x) = 0$. Par définition de F_X , on obtient donc :

$$F_Y(x) = P(-e^x \leq X \leq e^x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x).$$

- 3) b) Utilisons la formule précédente sans expliciter F_Y . La fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc les deux compositions qui définissent F_Y sont continues. Par ailleurs, F_X est de classe C^1 en dehors de -1 et 1 , puisque f y est continue.

Pour $x \neq 0$, ni e^x ni $-e^x$ ne sont égaux aux points problématiques correspondants. Les règles de dérivation donnent donc :

$$F'_Y(x) = e^x f(e^x) + e^x f(-e^x).$$

Lorsque $x < 0$, on a $0 < e^x < 1$ et les deux valeurs de f sont nulles. Lorsque $x > 0$, on a $e^x > 1$ et, par parité,

$$F'_Y(x) = 2e^x \frac{1}{2(e^x)^2} = e^{-x}.$$

Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Une densité est :

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les limites unilatérales de g sont finies en tout point réel. Cette fonction est la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre 1. Donc Y suit cette loi.

4) a) Pour $x \geq 0$, on a $0 < e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$. Pour $x < 0$, on a $e^{-x} > 1$, donc $1 - e^{-x} < 0$. Ces deux observations permettront d'utiliser la fonction de répartition de la loi uniforme.

4) b) Puisque $0 \leq U < 1$, on a $1 - U > 0$ et Z est bien définie. Pour tout réel x , les règles de monotonie du logarithme et de l'exponentielle donnent :

$$[Z \leq x] = [-\ln(1 - U) \leq x] = [1 - U \geq e^{-x}] = [U \leq 1 - e^{-x}].$$

Si $x < 0$, le seuil est négatif et la probabilité vaut 0. Si $x \geq 0$, le seuil appartient à $[0, 1[$ et, puisque U est uniforme sur cet intervalle, la probabilité vaut $1 - e^{-x}$. Ainsi :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, qui est donc aussi la loi de Z .

4) c) Code adapté en Python.

La question 4) b) permet de transformer une variable uniforme en une variable exponentielle de paramètre 1, donc de même loi que Y :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def expo():
    return -np.log(1 - rd.random())
```

L'appel `rd.random()` fournit une valeur $u \in [0, 1[$; le logarithme est donc pris en $1 - u > 0$. La fonction renvoie $-\ln(1 - u)$. Ce code a été exécuté, avec vérification de la positivité des sorties et de valeurs imposées de u , dont $u = 0$. Sa justification exacte provient de 4) b); la simulation ne démontre pas la loi.

Problème

Partie 1 : étude de f

- 1) a) Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) b) Les colonnes engendrent $\text{Im } f$. La première colonne est un multiple non nul de $(0, 1, 1)$, tandis que les deux suivantes sont des multiples non nuls de $(1, 0, 0)$. Ces deux vecteurs sont indépendants : si $a(0, 1, 1) + b(1, 0, 0) = 0$, les coordonnées donnent $b = 0$ puis $a = 0$.

Ainsi $\text{Im } f = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 0))$ et $\dim \text{Im } f = 2$. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donne $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$.

- 1) c) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}(y + z), \frac{x}{3}, \frac{x}{3} \right).$$

Cette image est nulle si et seulement si $x = 0$ et $z = -y$. Donc :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, -1)).$$

Le vecteur $(0, 1, -1)$ étant non nul, 0 est une valeur propre et son sous-espace propre est ce noyau.

- 1) d) Cherchons les valeurs propres non nulles à partir des coordonnées, sans calculer de déterminant. Si $\lambda \neq 0$ et si le vecteur non nul (x, y, z) vérifie $f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, alors :

$$\frac{2}{3}(y + z) = \lambda x, \quad \frac{x}{3} = \lambda y, \quad \frac{x}{3} = \lambda z.$$

Les deux dernières égalités donnent $y = z$ et $x = 3\lambda y$. Si $y = 0$, on aurait $x = z = 0$, ce qui est exclu. En reportant dans la première égalité puis en divisant par $y \neq 0$, on obtient $4/3 = 3\lambda^2$, soit $\lambda^2 = 4/9$.

Pour $\lambda = 2/3$, les équations donnent $(x, y, z) = y(2, 1, 1)$. Réciproquement, $f(2, 1, 1) = (2/3)(2, 1, 1)$. Pour $\lambda = -2/3$, elles donnent $(x, y, z) = y(-2, 1, 1)$, et $f(-2, 1, 1) = (-2/3)(-2, 1, 1)$.

Les autres valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont donc :

$$E_{2/3}(f) = \text{Vect}((2, 1, 1)), \quad E_{-2/3}(f) = \text{Vect}((-2, 1, 1)).$$

- 1) e) Les trois vecteurs $(2, 1, 1)$, $(-2, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$ sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes. Ils sont donc indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme f est ainsi diagonalisable.

- 2) a) Les colonnes de P sont exactement les trois vecteurs propres de la base précédente, dans l'ordre $2/3, -2/3, 0$. Une matrice dont les colonnes forment une base est inversible, sans qu'un calcul d'inverse soit nécessaire ici. La formule de changement de base donne :

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = PDP^{-1}.$$

2) b) Effectuons le produit :

$$PQ = \begin{pmatrix} 2+2 & 2-2 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+1-2 & 1+1+2 \end{pmatrix} = 4I.$$

Comme P est inversible, cette identité donne $P^{-1} = Q/4$, soit :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) c) Respectons la récurrence demandée. Au rang $j = 0$, $M^0 = I = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$.

Si $M^j = PD^jP^{-1}$ à un rang $j \geq 0$, alors :

$$M^{j+1} = M^jM = PD^jP^{-1}PDP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}.$$

Par récurrence, la relation est vraie pour tout $j \in \mathbb{N}$.

2) d) La première colonne de M^j est M^je_1 . Comme $P^{-1}e_1 = \frac{1}{4}{}^t(1, -1, 0)$, pour $j \geq 1$:

$$M^je_1 = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^j \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{2}{3} \right)^j \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La première colonne cherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} ((2/3)^j + (-2/3)^j) \\ \frac{1}{4} ((2/3)^j - (-2/3)^j) \\ \frac{1}{4} ((2/3)^j - (-2/3)^j) \end{pmatrix}.$$

Pour $j = 0$, les puissances de $2/3$ et de $-2/3$ valent toutes deux 1, et cette expression vaut ${}^t(1, 0, 0)$, première colonne de $M^0 = I$. La formule reste donc valable au rang 0, sans avoir à donner un sens à une puissance 0^0 .

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

- 1) Au premier tirage, chacune des trois boules est obtenue avec la probabilité $1/3$. Ainsi X_1 suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$:

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

- 2) Code adapté en Python.

Pour $k \geq 1$, le programme complet est :

Python

```
import numpy.random as rd

k = int(input())
X = rd.randint(3) + 1
for i in range(2, k + 1):
    tirage = rd.randint(3) + 1
    if X == 1:
        X = tirage
    elif tirage != X:
        X = 1
```

```
print(X)
```

L'initialisation effectue le premier tirage et donne $X = X_1$. La boucle parcourt $i = 2, \dots, k$, soit exactement les $k - 1$ tirages restants. Si l'état précédent vaut 1, le nouvel état est le numéro tiré. Sinon, le nouvel état vaut 1 si le numéro tiré diffère de cet état; lorsque les deux sont égaux, aucune affectation n'est effectuée et l'état est conservé. À la fin, X vaut donc X_k .

Pour $k = 1$, la boucle est vide : le programme affiche directement X_1 , ce qui convient. Le programme a été exécuté avec des entrées imposées, et les neuf combinaisons « état précédent, boule tirée » ont été contrôlées. Les sorties aléatoires illustrent le modèle; les probabilités sont établies dans les questions suivantes.

3) a) Question adaptée au programme actuel : la positivité des événements de conditionnement est explicitement prise en compte.

Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, l'événement « les k premières boules tirées portent toutes le numéro j » a pour probabilité $3^{-k} > 0$ et entraîne $X_k = j$. Ainsi $P(X_k = j) \geq 3^{-k} > 0$, ce qui autorise les probabilités conditionnelles demandées.

Si l'état courant est 1, les trois états suivants ont chacun la probabilité $1/3$. Si l'état courant est 2, on reste en 2 lorsque la boule 2 est tirée, de probabilité $1/3$, et on passe en 1 sinon, de probabilité $2/3$; on ne peut pas passer en 3. Le raisonnement est symétrique à partir de l'état 3.

Le tableau suivant donne les probabilités $P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)$, avec l'état courant j en ligne et l'état suivant i en colonne :

État courant j	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	$1/3$	$1/3$	$1/3$
2	$2/3$	$1/3$	0
3	$2/3$	0	$1/3$

- 3) b) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet donné entraîne :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^3 P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)P(X_k = j).$$

En utilisant les colonnes U_k de l'énoncé, les trois égalités s'écrivent :

$$U_{k+1} = AU_k, \quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Question adaptée au programme actuel : la convention en colonnes de l'annale a été conservée et reliée explicitement à la convention usuelle en lignes. La matrice de transition pour les lignes est $T = {}^tA$. Ses coefficients sont positifs ou nuls et chaque ligne somme à 1, comme le tableau le montre. Avec $V_k = {}^tU_k$, la relation équivalente est $V_{k+1} = V_k T$.

- 3) c) La matrice U_0 est auxiliaire ; les variables X_k ont été définies pour $k \geq 1$.
Calculons :

$$AU_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = U_1.$$

De plus $A^0 U_0 = U_0$. Si $U_k = A^k U_0$ pour un $k \geq 1$, alors la récurrence précédente donne $U_{k+1} = AU_k = A^{k+1} U_0$. La formule est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 4) a) Par comparaison des coefficients de A et de M , on a bien $A = M + \frac{1}{3}I$. Les matrices M et $\frac{1}{3}I$ commutent, car :

$$M \left(\frac{1}{3} I \right) = \frac{1}{3} M = \left(\frac{1}{3} I \right) M.$$

On peut donc appliquer le binôme pour des matrices qui commutent. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3} I \right)^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} M^j.$$

Pour $k = 0$, le membre de droite contient seulement le terme I , ce qui vérifie également le cas initial.

4) b) Méthode 1 — Utiliser le binôme et la première colonne de M^j

La formule de la partie 1, question 2) d), vaut pour tous les termes $j = 0, \dots, k$. Posons :

$$S_+ = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} \left(\frac{2}{3} \right)^j = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right)^k = 1,$$

$$S_- = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3} \right)^j = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right)^k = \left(-\frac{1}{3} \right)^k.$$

En effectuant la combinaison linéaire des premières colonnes de M^j , la première colonne de A^k est donc :

$$A^k U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \\ \frac{1}{4}(S_+ - S_-) \\ \frac{1}{4}(S_+ - S_-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + (-1/3)^k) \\ \frac{1}{4}(1 - (-1/3)^k) \\ \frac{1}{4}(1 - (-1/3)^k) \end{pmatrix}.$$

Pour $k \geq 1$, cette colonne est U_k et ses coefficients sont les probabilités demandées. Ils sont strictement positifs, car $|(-1/3)^k| < 1$, et leur somme vaut 1.

Méthode 2 — Résoudre une récurrence sur les probabilités

Posons $p_k = P(X_k = 1)$. D'après 3) b),

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}(P(X_k = 2) + P(X_k = 3)) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}p_k.$$

Ainsi $p_{k+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(p_k - \frac{1}{2})$. Comme $p_1 = 1/3$,

$$p_k - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$$

En outre, si $d_k = P(X_k = 2) - P(X_k = 3)$, les deux dernières lignes de $U_{k+1} = AU_k$ donnent $d_{k+1} = d_k/3$. Puisque $d_1 = 0$, on a $d_k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Les deux dernières probabilités sont donc égales et valent $(1 - p_k)/2 = \frac{1}{4}(1 - (-1/3)^k)$.

Cette seconde méthode retrouve les lois directement à partir du modèle ; la première respecte l'enchaînement matriciel demandé et fournit aussi la première colonne au rang 0.

4) c) Méthode 1 — Utiliser la caractérisation pour les variables à valeurs entières

Comme $|-1/3| < 1$, on a $(-1/3)^k \rightarrow 0$. Les probabilités obtenues donnent donc :

$$P(X_k = 1) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad P(X_k = 2) \rightarrow \frac{1}{4}, \quad P(X_k = 3) \rightarrow \frac{1}{4}.$$

Ces limites définissent une loi, leurs valeurs étant positives et de somme 1. Soit X une variable de cette loi, portée par $\{1, 2, 3\}$. Pour tout autre entier m ,

$P(X_k = m) = P(X = m) = 0$. La convergence des masses a donc lieu en tout entier. La caractérisation au programme des convergences en loi pour des variables à valeurs dans $\mathbb{Z}$ entraîne $X_k \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Méthode 2 — Vérifier les fonctions de répartition

Écrivons directement :

$$F_{X_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{2}(1 + (-1/3)^k) & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-1/3)^k & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, les quatre expressions tendent respectivement vers 0, $1/2$, $3/4$, 1, qui constituent la fonction de répartition de la loi précédente. La convergence a lieu en particulier en chaque point de continuité de cette fonction. La définition de la convergence en loi donne donc encore $X_k \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

La première méthode est plus rapide pour un support entier ; la seconde retrouve directement le critère de définition par les fonctions de répartition.

- 5) a) Comme X_k ne prend que trois valeurs, son espérance existe. En notant $r_k = (-1/3)^k$, la formule d'espérance d'une variable discrète finie donne :

$$E(X_k) = 1 \times \frac{1}{2}(1 + r_k) + 2 \times \frac{1}{4}(1 - r_k) + 3 \times \frac{1}{4}(1 - r_k),$$

$$E(X_k) = \frac{1}{2}(1 + r_k) + \frac{5}{4}(1 - r_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$$

Cette expression donne notamment $E(X_1) = 2$, comme pour une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

- 5) b) Code adapté en Python.

Pour un entier $k \geq 1$, la formule précédente s'écrit directement :

Python

```
def esp(k):  
    return 7 / 4 - (3 / 4) * (-1 / 3) ** k
```

La fonction n'a besoin d'aucun import : elle utilise les opérations numériques et la puissance. L'exposant est appliqué à la valeur négative $-1/3$, grâce aux parenthèses. Ce code a été exécuté ; ses valeurs ont été comparées aux espérances calculées par les puissances de la matrice de transition pour plusieurs rangs, dont $k = 1$ et $k = 2$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 4) : étude de la hessienne et des signes de ses valeurs propres explicitée, pour traiter le critère dégénéré avec la méthode du programme actuel.
- Exercice 3, préambule de 3) et 3) a) : définition de $\ln |X|$ précisée sur un événement de probabilité 1, avec une valeur fixée sur son complément négligeable ; la loi étudiée est inchangée et aucun logarithme d'un nombre nul n'est utilisé.
- Exercice 3, 4) c) : Code adapté en Python ; documentation des commandes `rd.random()` et `np.log`, conservation du blanc à compléter dans le sujet et fourniture de la fonction complète dans le corrigé.
- Problème, partie 2, 2) : Code adapté en Python ; documentation de l'aléatoire, de la saisie et de range, conservation des deux blancs et des mêmes transitions.
- Problème, partie 2, 3) a) : ajout d'un guidage pour vérifier que les événements de conditionnement ont une probabilité strictement positive.
- Problème, partie 2, 3) b) : convention historique en colonnes conservée et reliée par transposition à la convention en lignes du programme actuel.
- Problème, partie 2, 3) c) : caractère auxiliaire de U_0 précisé, les variables aléatoires de l'énoncé étant définies à partir du rang 1.

- Problème, partie 2, 5) b) : Code adapté en Python pour le calcul de l'espérance.