



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :

$$f(0) = 1, \text{ et, pour tout } x \text{ non nul de }]-\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

- 1) Montrer que f est continue sur $] - \infty, 1[$.
- 2) a) Déterminer le développement limité de $\ln(1 - x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.

- 2) b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour guider le calcul, écrire le résultat précédent sous la forme

$$\ln(1 - x) = -x + ax^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ où } a \text{ est le coefficient déterminé en 2) a) et } \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

Factoriser $-x$ dans cette égalité, puis exprimer exactement le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ avant de prendre sa limite.

- 3) a) Montrer que f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.
- 3) b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1 - x) + x$ lorsque x appartient à $] - \infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .
- 3) c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
- 4) a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$, et donner la valeur de u_1 .
- 4) b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

- 1) On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a l'égalité $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

- 1) a) Pour tout entier naturel k , calculer $P(Z > k)$.

- 1) b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

- 1) c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- 2) On définit la variable aléatoire T de la façon suivante : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \frac{1 + X(\omega)}{2}$.

On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- 2) a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

- 2) b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- 2) c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains des événements $[X = i]$, puis montrer que T suit la même loi que Z .

- 3) Après l'importation `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random()` simule de façon uniforme un réel de $[0, 1[$. Les appels successifs représentent des tirages indépendants. La commande `input` lit la saisie sous forme de chaîne ; `float` la convertit en nombre réel. On saisira un paramètre p strictement compris entre 0 et 1. L'opérateur `%` donne le reste de la division entière et `//` le quotient entier.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers, et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T , définie dans la deuxième question.

Python

```
import numpy.random as rd

p = float(input("Paramètre p, avec 0 < p < 1 : "))
x = 0
lancer = 1.0
while lancer > p:
    lancer = rd.random()
    x = ...

if x % 2 == 0:
    t = ...
else:
    t = ...

print(t)
```

Exercice 3

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif.

- 1) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx$, puis donner sa valeur.

1) b) Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X .

1) c) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x h(x) dx$, puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

2) Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f , nulle sur $] - \infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de Y .

Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3) a) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

3) b) Montrer que g est continue sur $] - \infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.

3) c) En remarquant que, si l'on pose $u'(x) = -f(x)$, on peut choisir $u(x) = 1 - F(x)$, montrer grâce à une intégration par parties que $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} g(x) dx = 1$.

3) d) Établir que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z .

3) e) Étude d'un cas particulier.

Vérifier qu'une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$, vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que Z suit la même loi que X .

Problème

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2.$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P .

1) Montrer que f est un endomorphisme de E .

2) Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2) .

3) a) Établir que f est un automorphisme de E . En déduire $\text{Ker } f$.

3) b) Écrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2) .

4) a) Déterminer la seule valeur propre λ de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- 4) b) Préciser le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Partie 2

On note F l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. À toute fonction $u \in F$, on associe la fonction $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u .

On note $K_6 = \{u \in F : g(u) = 6u\}$ et $K_0 = \{u \in F : g(u) = 0\}$, c'est-à-dire les ensembles de solutions des équations différentielles correspondantes. Pour une famille finie de fonctions, la notation Vect désigne l'ensemble de leurs combinaisons linéaires réelles.

- 1) Vérifier que $g(u) \in F$ pour tout $u \in F$, puis que, pour tous $u, v \in F$ et tous réels a, b , on a $g(au + bv) = ag(u) + bg(v)$.
- 2) Dans cette question, on se propose de déterminer K_6 . On considère donc une fonction u élément de K_6 .
 - 2) a) Montrer que la fonction j , définie pour tout réel x par $j(x) = u'(x)e^{-5x}$, est constante.
 - 2) b) En déduire que $K_6 = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.

On se propose, dans les trois questions suivantes, de déterminer K_0 . On considère donc une fonction u élément de K_0 .

- 3) On pose $v = u' - 2u$.
 - 3) a) Montrer que $v' = 3v$.
 - 3) b) En déduire que la fonction h , définie pour tout réel x par $h(x) = v(x)e^{-3x}$, est constante.

- 3) c) Conclure qu'il existe un réel α tel que $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha e^{3x}$.
- 4) On pose $w = u' - 3u$.
- 4) a) Montrer que $w' = 2w$.
- 4) b) En déduire que la fonction k , définie pour tout réel x par $k(x) = w(x)e^{-2x}$, est constante.
- 4) c) Conclure qu'il existe un réel β tel que $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = \beta e^{2x}$.
- 5) a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que $K_0 = \text{Vect}(u_3, u_4)$, où les fonctions u_3 et u_4 sont définies pour tout réel x par $u_3(x) = e^{3x}$ et $u_4(x) = e^{2x}$.
- 5) b) Montrer enfin que K_0 est un espace vectoriel de dimension 2, en vérifiant que (u_3, u_4) en constitue une base.