



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) On traite séparément le point de raccord et les deux intervalles où la formule est un quotient.

Si $x < 1$ et $x \neq 0$, alors $1 - x > 0$ et $\ln(1 - x) \neq 0$. Les fonctions du numérateur et du dénominateur sont continues, et le dénominateur ne s'annule pas. Leur quotient est donc continu sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

Lorsque $x \rightarrow 0$, la limite usuelle du taux d'accroissement du logarithme donne $\frac{\ln(1-x)}{-x} \rightarrow 1$. Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{(1-x) \frac{\ln(1-x)}{-x}} \rightarrow 1 = f(0).$$

La fonction f est donc également continue en 0, et finalement continue sur $] -\infty, 1[$.

- 2) a) On applique directement Taylor-Young à la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1 - x)$, qui est de classe C^2 sur un voisinage de 0 contenu dans $] -\infty, 1[$.

On a $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{1-x}$ et $\varphi''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$. Par conséquent $\varphi'(0) = -1$ et $\varphi''(0) = -1$, d'où

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

- 2) b) Question adaptée au programme actuel : le calcul du taux d'accroissement est guidé, sans supposer des règles générales de calcul de développements limités.

Le résultat précédent signifie qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = -x \left(1 + \frac{x}{2} - x\varepsilon(x) \right).$$

Pour $x \neq 0$ assez proche de 0, le facteur entre parenthèses est non nul, car il tend vers 1. On peut donc écrire exactement

$$f(x) = \frac{1}{(1-x) \left(1 + \frac{x}{2} - x\varepsilon(x)\right)}.$$

On soustrait $f(0) = 1$ puis on met au même dénominateur :

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x) + x \left(\frac{1}{2} - \varepsilon(x)\right)}{(1-x) \left(1 + \frac{x}{2} - x\varepsilon(x)\right)}.$$

Le numérateur tend vers $1/2$ et le dénominateur vers 1. Le taux d'accroissement admet donc une limite finie égale à $1/2$: f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.

- 3) a) Sur chacun des intervalles considérés, le numérateur et le dénominateur sont dérivables et le dénominateur est non nul. La formule de dérivation d'un quotient s'applique.

En notant $D(x) = (1-x) \ln(1-x)$, on a $D'(x) = -\ln(1-x) - 1$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{-D(x) + xD'(x)}{D(x)^2} = \frac{-(1-x) \ln(1-x) - x \ln(1-x) - x}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)}.$$

Par réduction du numérateur :

$$f'(x) = \frac{-\ln(1-x) - x}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)} \quad \text{pour } x < 1, x \neq 0.$$

- 3) b) Méthode 1 — Étudier une fonction auxiliaire.

Posons $a(x) = \ln(1-x) + x$, définie et dérivable pour $x < 1$. Sa dérivée est

$$a'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = -\frac{x}{1-x}.$$

Le dénominateur est positif. La fonction a est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$. Comme $a(0) = 0$, on a $a(x) < 0$ pour $x \neq 0$ et $a(0) = 0$.

Le dénominateur de la formule de $f'(x)$ est strictement positif pour $x \neq 0$; ainsi $f'(x) > 0$ en ces points. En outre $f'(0) = 1/2 > 0$. La fonction f est donc strictement

croissante sur tout $] -\infty, 1[$.

Méthode 2 — Utiliser la tangente au logarithme.

La fonction $\varphi(x) = \ln(1-x)$ est de classe C^2 sur $] -\infty, 1[$ et $\varphi''(x) = -1/(1-x)^2 < 0$. Elle est donc concave, et son graphe se situe au-dessous de sa tangente en 0, d'équation $y = -x$. On obtient $a(x) \leq 0$ pour tout $x < 1$. Dès lors $f'(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$, et $f'(0) > 0$, donc f est croissante.

Pour vérifier la stricte inégalité et la stricte croissance sans ajouter un résultat sur les tangentes, supposons $a(x_0) = 0$ avec $x_0 \neq 0$. La concavité de a donne $a \geq 0$ sur le segment joignant 0 à x_0 , tandis que la majoration par la tangente donne $a \leq 0$; elle serait donc identiquement nulle sur ce segment, contrairement à $a''(x) = -1/(1-x)^2 < 0$ sur son intérieur. Ainsi $a(x) < 0$ pour $x \neq 0$, puis $f'(x) > 0$ partout.

La première méthode donne directement le tableau des signes; la seconde relie cette inégalité classique à la concavité du logarithme.

3) c) Posons $t = 1 - x > 0$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $t \rightarrow +\infty$ et

$$f(x) = \frac{t-1}{t \ln t} = \frac{1-1/t}{\ln t} \rightarrow 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a $t \rightarrow 0^+$. La croissance comparée donne $t \ln t \rightarrow 0$, avec $t \ln t < 0$ pour $0 < t < 1$, tandis que $t-1 \rightarrow -1$. Par conséquent $f(x) \rightarrow +\infty$.

Le tableau résume la stricte croissance établie et la valeur de raccord :

x	$-\infty$		0		1^-
$f'(x)$		+	$1/2$	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Les valeurs 0 et $+\infty$ dans la dernière étude sont des limites aux bornes, et ne sont pas des valeurs atteintes de la fonction.

- 4) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$. Comme $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, elle réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre n appartient à cet intervalle image : il existe donc un unique $u_n \in [0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$. Comme $f(0) = 1$, l'unicité donne $u_1 = 0$.

- 4) b) Pour tout $n \geq 1$, on a $f(u_{n+1}) = n + 1 > n = f(u_n)$. La stricte croissance de f entraîne $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$. Si $\ell < 1$, la continuité de f en ℓ entraînerait $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$, limite finie, alors que $f(u_n) = n \rightarrow +\infty$. Cette contradiction impose $\ell = 1$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

- 1) a) Pour une variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p , la probabilité de dépasser le rang $k \in \mathbb{N}$ vaut q^k . Par indépendance de X et Y , les événements $[X > k]$ et $[Y > k]$ sont indépendants. L'égalité rappelée dans l'énoncé donne donc

$$P(Z > k) = P(X > k)P(Y > k) = q^{2k}.$$

Pour $k = 0$, on obtient bien $P(Z > 0) = 1$.

- 1) b) La variable Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \geq 1$, l'événement $[Z > k - 1]$ est la réunion disjointe de $[Z = k]$ et de $[Z > k]$.

L'additivité des probabilités donne $P(Z > k - 1) = P(Z = k) + P(Z > k)$, d'où

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

- 1) c) En remplaçant les probabilités précédentes par les valeurs obtenues en 1) a), on a, pour $k \geq 1$,

$$P(Z = k) = q^{2k-2} - q^{2k} = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}.$$

Comme $0 < q < 1$, le nombre $r = 1 - q^2$ appartient à $]0, 1[$, et cette formule est $r(1 - r)^{k-1}$. Ainsi Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

2) a) Si $X(\omega) = 2m$ est pair, alors $m \geq 1$, car X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et $T(\omega) = m \in \mathbb{N}^*$.

Si $X(\omega) = 2m + 1$ est impair, alors $m \geq 0$ et $T(\omega) = m + 1 \in \mathbb{N}^*$. Dans les deux cas, T prend donc une valeur entière non nulle.

2) b) Soit $k \geq 1$. Comme $pq^{2k-1} > 0$, l'événement $[X = 2k]$ a une probabilité strictement positive ; il est donc non vide. Pour tout ω dans cet événement, $T(\omega) = k$. Ainsi $k \in T(\Omega)$.

On a donc $\mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$, et l'inclusion réciproque a été prouvée en 2) a). Par conséquent $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2) c) Pour tout $k \geq 1$, les deux seuls antécédents de k par la transformation définissant T sont $2k$ et $2k - 1$. On a donc la réunion disjointe

$$[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1].$$

Il en résulte

$$P(T = k) = pq^{2k-1} + pq^{2k-2} = p(1 + q)q^{2k-2}.$$

Or $p = 1 - q$, donc $p(1 + q) = 1 - q^2$. On obtient $P(T = k) = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Les supports et toutes les probabilités ponctuelles coïncident : T et Z suivent la même loi.

3) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. La saisie du paramètre est explicitée et le tirage uniforme est une variable réelle.

Python

```
import numpy.random as rd

p = float(input("Paramètre p, avec 0 < p < 1 : "))
x = 0
```

```

lancer = 1.0
while lancer > p:
    lancer = rd.random()
    x = x + 1

if x % 2 == 0:
    t = x // 2
else:
    t = (1 + x) // 2

print(t)

```

La valeur initiale `lancer = 1.0` est supérieure à p : elle impose un premier passage dans la boucle. À chaque passage, un nouveau lancer est simulé et le compteur x est augmenté d'une unité. La boucle s'arrête au premier tirage inférieur ou égal à p , événement de probabilité p pour une loi uniforme continue.

Après m passages, la probabilité de n'avoir encore obtenu aucun succès vaut q^m , qui tend vers 0. La boucle se termine donc avec probabilité 1, et x simule le rang X du premier succès. Les deux affectations de t appliquent exactement la définition de T , avec des quotients entiers puisque les numérateurs sont pairs.

Ce bloc a été exécuté avec plusieurs valeurs admissibles de p ; les cas de sortie paire et impaire de x ainsi que les passages multiples dans la boucle ont aussi été contrôlés avec des tirages fixés. La simulation illustre la loi, tandis que les calculs de 2) c) établissent son expression exacte.

Exercice 3

1) a) Méthode 1 — Reconnaître un moment d'une loi exponentielle.

Soit W une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Sa densité sur $[0, +\infty[$ est $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$, et son espérance existe et vaut $1/\lambda$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda E(W) = 1.$$

La convergence est justifiée par l'existence de l'espérance de W , et l'intégrande est positif.

Méthode 2 — Calculer sur un segment avant de passer à la limite.

Pour $B > 0$, une intégration par parties de fonctions de classe C^1 sur $[0, B]$ donne

$$\int_0^B \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = [-\lambda x e^{-\lambda x}]_0^B + \lambda \int_0^B e^{-\lambda x} dx = 1 - (1 + \lambda B)e^{-\lambda B}.$$

Les croissances comparées entraînent $(1 + \lambda B)e^{-\lambda B} \rightarrow 0$ lorsque $B \rightarrow +\infty$. L'intégrale impropre converge donc et vaut 1.

La première méthode utilise un moment connu pour identifier rapidement l'intégrale ; la seconde en établit directement la valeur par une intégration sur un segment.

- 1) b) Puisque $\lambda > 0$, la fonction h est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et ses deux limites en 0 sont nulles ; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est nulle sur $] -\infty, 0[$ et son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut 1. Elle satisfait ainsi toutes les conditions d'une densité de probabilité, avec des limites finies de chaque côté en tout point réel. Elle peut donc être considérée comme la densité de X .

- 1) c) Méthode 1 — Utiliser le second moment exponentiel.

Pour la variable W de 1) a), les moments $E(W) = 1/\lambda$ et $V(W) = 1/\lambda^2$ sont finis. La formule de Koenig-Huygens donne $E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = 2/\lambda^2$.

Comme $xh(x) = \lambda x^2 \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} xh(x) dx = \lambda E(W^2) = \frac{2}{\lambda}.$$

Méthode 2 — Ramener l'intégrale à celle de 1) a).

Pour $B > 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, B]$ donne

$$\int_0^B xh(x) dx = \int_0^B \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = -\lambda B^2 e^{-\lambda B} + 2\lambda \int_0^B x e^{-\lambda x} dx,$$

soit

$$\int_0^B xh(x) dx = -\lambda B^2 e^{-\lambda B} + \frac{2}{\lambda} \int_0^B h(x) dx.$$

Le premier terme tend vers 0 par croissance comparée ; le second tend vers $2/\lambda$ d'après 1) a). Cela établit directement la convergence et la même valeur.

Dans les deux méthodes, $xh(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $h = 0$ sur les réels négatifs ; l'intégrale de $|x|h(x)$ est donc finie. La variable X admet une espérance, et $E(X) = 2/\lambda$. Les deux approches distinguent l'utilisation d'un moment connu et le calcul élémentaire de ce moment particulier.

2) On doit vérifier que la queue de la loi reste strictement positive à toute borne finie.

Si $x < 0$, la densité est nulle sur $] -\infty, 0[$ et Y n'a pas de masse ponctuelle : $F(x) = 0$, donc $1 - F(x) = 1$.

Si $x \geq 0$, la fonction f est continue et strictement positive sur le segment $[x, x+1]$. Son intégrale sur ce segment est strictement positive. Par conséquent

$$1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt \geq \int_x^{x+1} f(t) dt > 0.$$

Ainsi $1 - F(x) > 0$ pour tout réel x , ce qui permet notamment de définir le logarithme apparaissant dans g .

3) a) Pour $x \geq 0$, on a $f(x) > 0$ et $0 < 1 - F(x) \leq 1$, donc $\ln(1 - F(x)) \leq 0$. Il en résulte $-f(x) \ln(1 - F(x)) \geq 0$.

Pour $x < 0$, la définition donne $g(x) = 0$. La fonction g est donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3) b) Sur $] -\infty, 0[$, la fonction g est constante nulle, donc continue.

Sur $[0, +\infty[$, la densité f est continue par hypothèse. La fonction de répartition F d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$; comme $1 - F > 0$, la composée $\ln(1 - F)$ est continue. Le produit définissant g est donc continu sur $[0, +\infty[$, au sens de la continuité à droite en 0.

En outre $F(0) = 0$, d'où $g(0) = -f(0) \ln 1 = 0$. Cela montre que les limites à gauche et à droite de g en 0 sont toutes deux nulles : g est même continue sur tout $\mathbb{R}$.

3) c) Posons $S(x) = 1 - F(x)$ pour $x \geq 0$. Sur tout segment $[0, B]$, on a $S > 0$, $S(0) = 1$ et $S' = -f$, avec une dérivée à droite à la borne 0. La continuité de f permet d'appliquer les règles d'intégration sur ce segment. On a $g = S' \ln S$.

L'intégration par parties indiquée dans l'énoncé donne

$$\int_0^B g(x) dx = [S(x) \ln S(x)]_0^B - \int_0^B S(x) \frac{S'(x)}{S(x)} dx.$$

Le dénominateur $S(x)$ est strictement positif, donc la simplification est licite. Comme $S(0) = 1$, il vient

$$\int_0^B g(x) dx = S(B) \ln S(B) - S(B) + 1.$$

La fonction de répartition vérifie $F(B) \rightarrow 1$ lorsque $B \rightarrow +\infty$, donc $S(B) \rightarrow 0^+$. La limite usuelle $t \ln t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ donne $S(B) \ln S(B) \rightarrow 0$. Finalement

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B g(x) dx = 1.$$

L'intégrale généralisée converge et $\int_0^{+\infty} g(x) dx = 1$. Aucun échange entre limite et intégrale n'a été effectué : on a calculé l'intégrale sur chaque segment, puis pris la limite de sa valeur.

3) d) La fonction g est positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R}$ d'après 3) b), et nulle sur les réels strictement négatifs. D'après 3) c), son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

Elle satisfait donc les conditions d'une densité de probabilité ; ses limites en tout point sont finies par continuité. Elle peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z .

- 3) e) Une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ possède la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, et $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Sur $[0, +\infty[$, cette densité est continue et strictement positive, comme demandé en 2).

Pour $x \geq 0$, sa fonction de répartition vaut $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, donc

$$g(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \ln(e^{-\lambda x}) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} = h(x).$$

Pour $x < 0$, les deux fonctions g et h sont nulles. Elles sont ainsi égales sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que Z et X suivent la même loi. Aucune famille de lois supplémentaire n'est nécessaire pour cette identification.

Problème

Partie 1

- 1) Si P est de degré au plus 2, alors P' , P'' et $6P$ sont des polynômes de degré au plus 2, donc $f(P) \in E$.

Pour tous $P, Q \in E$ et tous réels a, b , la linéarité de la dérivation donne

$$f(aP + bQ) = (aP + bQ)'' - 5(aP + bQ)' + 6(aP + bQ) = af(P) + bf(Q).$$

L'application f est donc linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de cet espace de dimension 3.

- 2) Les images des vecteurs de la base fournissent les colonnes de la matrice :

$$f(e_0) = 6e_0, \quad f(e_1) = -5e_0 + 6e_1, \quad f(e_2) = 2e_0 - 10e_1 + 6e_2.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 3) a) La matrice A est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible, et l'endomorphisme f est un automorphisme de E .

En particulier, $f(P) = 0$ entraîne $P = 0$. Ainsi $\text{Ker } f = \{0\}$, où 0 désigne le polynôme nul.

- 3) b) Méthode 1 — Résoudre le système triangulaire.

Soit $Q = ae_0 + be_1 + ce_2$. Pour déterminer $P = xe_0 + ye_1 + ze_2$ tel que $f(P) = Q$, on résout

$$6z = c, \quad 6y - 10z = b, \quad 6x - 5y + 2z = a.$$

Les divisions par 6 sont licites. On obtient successivement

$$z = \frac{c}{6}, \quad y = \frac{b}{6} + \frac{5c}{18}, \quad x = \frac{a}{6} + \frac{5b}{36} + \frac{19c}{108}.$$

La matrice de f^{-1} dans la base donnée est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{19}{108} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Exploiter le calcul concret d'une puissance nulle.

Posons $N = A - 6I$. Le produit matriciel donne

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

En développant les produits, on vérifie directement

$$(6I + N) \left(\frac{1}{6}I - \frac{1}{36}N + \frac{1}{216}N^2 \right) = I,$$

et le même produit dans l'ordre inverse vaut I . Par conséquent

$$A^{-1} = \frac{1}{6}I - \frac{1}{36}N + \frac{1}{216}N^2,$$

ce qui redonne la matrice précédente, notamment son coefficient

$$-2/36 + 50/216 = 19/108 \text{ en position } (1, 3).$$

Le système triangulaire est une méthode générale de calcul d'un inverse ; la seconde méthode utilise seulement les produits effectivement calculés pour cette matrice et évite trois résolutions séparées.

4) a) La matrice A est triangulaire : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Sa seule valeur propre est donc $\lambda = 6$; elle est effectivement atteinte puisque

$$f(e_0) = 6e_0 \text{ et } e_0 \neq 0.$$

Si A était diagonalisable, la matrice diagonale semblable à A ne contiendrait que la valeur 6 sur sa diagonale. Elle serait donc égale à $6I$, et l'égalité de similitude entraînerait $A = P(6I)P^{-1} = 6I$. Cela contredit, par exemple, le coefficient -5 de A en position $(1, 2)$.

Ainsi f n'est pas diagonalisable.

- 4) b) Pour un polynôme $P = ae_0 + be_1 + ce_2$, l'équation $f(P) = 6P$ se traduit, dans la base donnée, par

$$-5b + 2c = 0, \quad -10c = 0.$$

La seconde équation impose $c = 0$, puis la première donne $b = 0$; le coefficient a est libre. Le sous-espace propre associé à 6 est donc l'ensemble des polynômes constants, soit $\text{Vect}(e_0)$.

Partie 2

- 1) Question adaptée au programme actuel : on vérifie directement la stabilité des fonctions de classe C^∞ et la linéarité de l'expression différentielle, sans recourir à l'algèbre des espaces de dimension infinie. Les ensembles K_6 et K_0 sont définis comme ensembles de solutions.

Si $u \in F$, ses dérivées u' et u'' sont encore de classe C^∞ . Une combinaison linéaire de telles fonctions est de classe C^∞ , donc $g(u) = u'' - 5u' + 6u \in F$.

Pour tous $u, v \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne

$$g(au + bv) = au'' + bv'' - 5au' - 5bv' + 6au + 6bv = ag(u) + bg(v).$$

Ces identités suffisent pour les calculs de solutions qui suivent; aucune dimension n'est attribuée à l'ensemble F .

- 2) a) Pour $u \in K_6$, l'équation $g(u) = 6u$ s'écrit $u'' - 5u' = 0$. La fonction $j(x) = u'(x)e^{-5x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$j'(x) = e^{-5x}(u''(x) - 5u'(x)) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, j est constante sur $\mathbb{R}$.

- 2) b) D'après 2) a), il existe un réel C tel que $u'(x)e^{-5x} = C$ pour tout x . Puisque $e^{-5x} > 0$, on en déduit $u'(x) = Ce^{5x}$. En prenant une primitive sur $\mathbb{R}$,

$$u(x) = A + \frac{C}{5}e^{5x} \text{ pour un certain réel } A.$$

La constante $C/5$ décrit tous les réels lorsque C décrit $\mathbb{R}$. Tout élément de K_6 appartient donc à $\text{Vect}(u_1, u_2)$.

Réciproquement, pour $u(x) = A + Be^{5x}$, on a $u'(x) = 5Be^{5x}$ et $u''(x) = 25Be^{5x}$, donc $g(u) = 6u$. Une telle fonction est de classe C^∞ et appartient à K_6 .

Les deux inclusions donnent $K_6 = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

3) a) Comme $u \in K_0$, on a $u'' - 5u' + 6u = 0$, soit $u'' = 5u' - 6u$. Pour $v = u' - 2u$, il vient

$$v' = u'' - 2u' = 3u' - 6u = 3(u' - 2u) = 3v.$$

Ainsi v vérifie l'équation différentielle $v' = 3v$ sur $\mathbb{R}$.

3) b) La fonction $h(x) = v(x)e^{-3x}$ est dérivable et

$$h'(x) = e^{-3x}(v'(x) - 3v(x)) = 0 \text{ d'après 3) a).}$$

Sa dérivée est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$; par conséquent h est constante.

3) c) Notons α la valeur constante de h . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $v(x)e^{-3x} = \alpha$.

L'exponentielle étant strictement positive, la multiplication par e^{3x} donne

$$v(x) = \alpha e^{3x}.$$

4) a) La même équation $u'' = 5u' - 6u$ donne, pour $w = u' - 3u$,

$$w' = u'' - 3u' = 2u' - 6u = 2(u' - 3u) = 2w.$$

Ainsi $w' = 2w$ sur $\mathbb{R}$.

4) b) La fonction $k(x) = w(x)e^{-2x}$ est dérivable et

$$k'(x) = e^{-2x}(w'(x) - 2w(x)) = 0 \text{ d'après 4) a).}$$

Sa dérivée étant nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction k est constante.

4) c) Notons β la valeur constante de k . On a $w(x)e^{-2x} = \beta$ pour tout x , d'où

$$w(x) = \beta e^{2x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5) a) Méthode 1 — Utiliser les deux fonctions auxiliaires de l'énoncé.

Les définitions donnent $v - w = (u' - 2u) - (u' - 3u) = u$. Les résultats de 3) c) et 4) c) entraînent donc

$$u(x) = \alpha e^{3x} - \beta e^{2x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit $K_0 \subset \text{Vect}(u_3, u_4)$.

Pour la réciproque, les fonctions u_3 et u_4 sont de classe C^∞ , et

$$g(u_3) = (9 - 15 + 6)e^{3x} = 0, \quad g(u_4) = (4 - 10 + 6)e^{2x} = 0.$$

Par la linéarité vérifiée en 1), toute combinaison linéaire de u_3 et de u_4 est solution de $g(u) = 0$. Cela établit l'inclusion réciproque, puis

$$K_0 = \text{Vect}(u_3, u_4).$$

Méthode 2 — Résoudre directement l'équation différentielle du second ordre.

L'équation $g(u) = 0$ est $u'' - 5u' + 6u = 0$, à coefficients réels constants. Son équation caractéristique différentielle est $r^2 - 5r + 6 = 0$, soit $(r - 2)(r - 3) = 0$. Elle possède deux racines réelles distinctes 2 et 3.

Le résultat de cours sur ces équations différentielles donne toutes les solutions sous la forme $u(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$, où $A, B \in \mathbb{R}$. Ces fonctions sont toutes de classe C^∞ , donc appartiennent bien à F . On retrouve exactement $K_0 = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

La première méthode respecte le chemin imposé et explique la décomposition par des équations du premier ordre; la seconde permet d'identifier rapidement les deux exponentielles dans une autre équation différentielle à racines réelles.

- 5) b) Question adaptée au programme actuel : la dimension porte uniquement sur l'ensemble concret de solutions déjà décrit à l'aide de deux fonctions.

L'égalité $K_0 = \text{Vect}(u_3, u_4)$ montre que K_0 est stable par combinaison linéaire et que (u_3, u_4) est génératrice. Pour vérifier que cette famille est libre, supposons $au_3 + bu_4 = 0$ comme égalité de fonctions.

En évaluant en 0, on obtient $a + b = 0$. En dérivant cette égalité puis en évaluant en 0, on obtient $3a + 2b = 0$. La différence entre la seconde égalité et deux fois la première donne $a = 0$, puis $b = 0$.

La famille (u_3, u_4) est donc libre et génératrice : c'est une base de K_0 . Plus concrètement, l'application $(a, b) \mapsto au_3 + bu_4$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur K_0 qui préserve les combinaisons linéaires. Ainsi K_0 est bien un espace vectoriel concret de dimension 2.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2) b) : ajout d'un guidage par une fonction de reste et par le taux d'accroissement exact, afin de ne pas supposer exigibles les techniques générales d'opérations sur les développements limités.
- Exercice 2, préambule : convention de la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ explicitée, en cohérence avec le rang du premier succès.
- Exercice 2, 3) : Code adapté en Python, avec documentation du tirage uniforme, de la saisie et des quotients entiers ; les blancs à compléter sont conservés. Le paramètre p est saisi dans le domaine annoncé. La déclaration originale du tirage comme entier est rectifiée : un tirage uniforme continu est réel. La boucle conserve le rang du premier succès et la transformation définissant T .
- Problème, partie 2, préambule et 1) : l'ensemble de toutes les fonctions de classe C^∞ n'est plus traité comme un espace vectoriel pour un exercice d'endomorphismes. La vérification explicite de la linéarité différentielle et les ensembles de solutions K_6, K_0 remplacent ce cadre ; toutes les équations différentielles et toutes les étapes guidées sont conservées.

- Problème, partie 2, 2) à 5) : les notations de noyaux sont remplacées de façon cohérente par K_6 et K_0 , sans changement des équations étudiées. En 5) b), la base et l'identification à $\mathbb{R}^2$ sont explicitées pour justifier la dimension du seul espace de solutions concret, conformément au cadre de dimension finie.