



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2008

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) d'unité 5 cm.

- 1) a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
- 1) b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- 2) b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) .
- 2) c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n , de (C_n) .
- 2) d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 puis tracer sur un même dessin les droites (D_1) , (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1) .
- 3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
- 3) b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
- 3) c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3) d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice, I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1) a) Déterminer la matrice $A(A - 2I)^2$ et en déduire les seules valeurs propres possibles de f .

1) b) On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$. Déterminer $f(u)$ et $f(v)$ puis en déduire les valeurs propres de f .

1) c) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2) On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$.

2) a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u, v, w) est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) c) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3) a) On pose $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

3) b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n .

3) c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1} .

3) d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $A^n = PT^nP^{-1}$.

3) e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 3

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur.

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

2) a) Montrer que f est paire.

2) b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X . On prend une réalisation telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

3) On pose $Y = \ln(1 + |X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3) a) Déterminer $Y(\Omega)$.

3) b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F .

3) c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3) d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

1) a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

1) b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left(t - \frac{k}{n} \right).$$

1) c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

1) d) En sommant la relation précédente, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

1) e) Conclure finalement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

2) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

2) a) Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

2) b) En déduire que $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

2) c) Déterminer $I(p+q, 0)$ et montrer finalement que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3) Informatique.

Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p, q)$, pour deux entiers naturels p, q . La boucle `for j in range(q)` fait prendre à j les valeurs entières de 0 à $q - 1$; lorsque $q = 0$, elle n'exécute aucune instruction. La valeur a contient initialement $I(p + q, 0)$, puis les facteurs de la relation de 2) a) sont appliqués successivement.

Python

```
def i(p, q):
    a = ...
    for j in range(q):
        a = ...
    return a
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $[U_n = \frac{k}{n}]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

On utilise la convention $0^0 = 1$ dans les formules binomiales et les fonctions polynomiales qui suivent; la loi $\mathcal{B}(m, 0)$ est la loi certaine en 0.

1) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, avec $p \in [0, 1]$.
Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$.

2) Donner la loi de X_1 .

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3) a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

3) b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.

3) c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n - 1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

3) d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.

4) a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$.

4) b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

4) c) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = V(X)$.