



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2008

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) La fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car $1 + e^x$ y est strictement positif. En dérivant le quotient puis la dérivée obtenue :

$$f'_n(x) = n - \frac{e^x}{(1 + e^x)^2},$$

$$f''_n(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} + \frac{2e^{2x}}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}.$$

- 1) b) Pour $t > 0$, l'inégalité $(t - 1)^2 \geq 0$ donne $(1 + t)^2 \geq 4t$, donc $\frac{t}{(1 + t)^2} \leq \frac{1}{4}$. Avec $t = e^x$ et $n \geq 1$:

$$f'_n(x) \geq n - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- 2) a) Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le terme $1/(1 + e^x)$ tend vers 1, tandis que $nx \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le premier terme tend vers 0 et le second vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

- 2) b) Pour une asymptote oblique, on étudie la différence entre la fonction et l'équation de la droite :

$$f_n(x) - nx = \frac{1}{1 + e^x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$f_n(x) - (nx + 1) = -\frac{e^x}{1 + e^x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

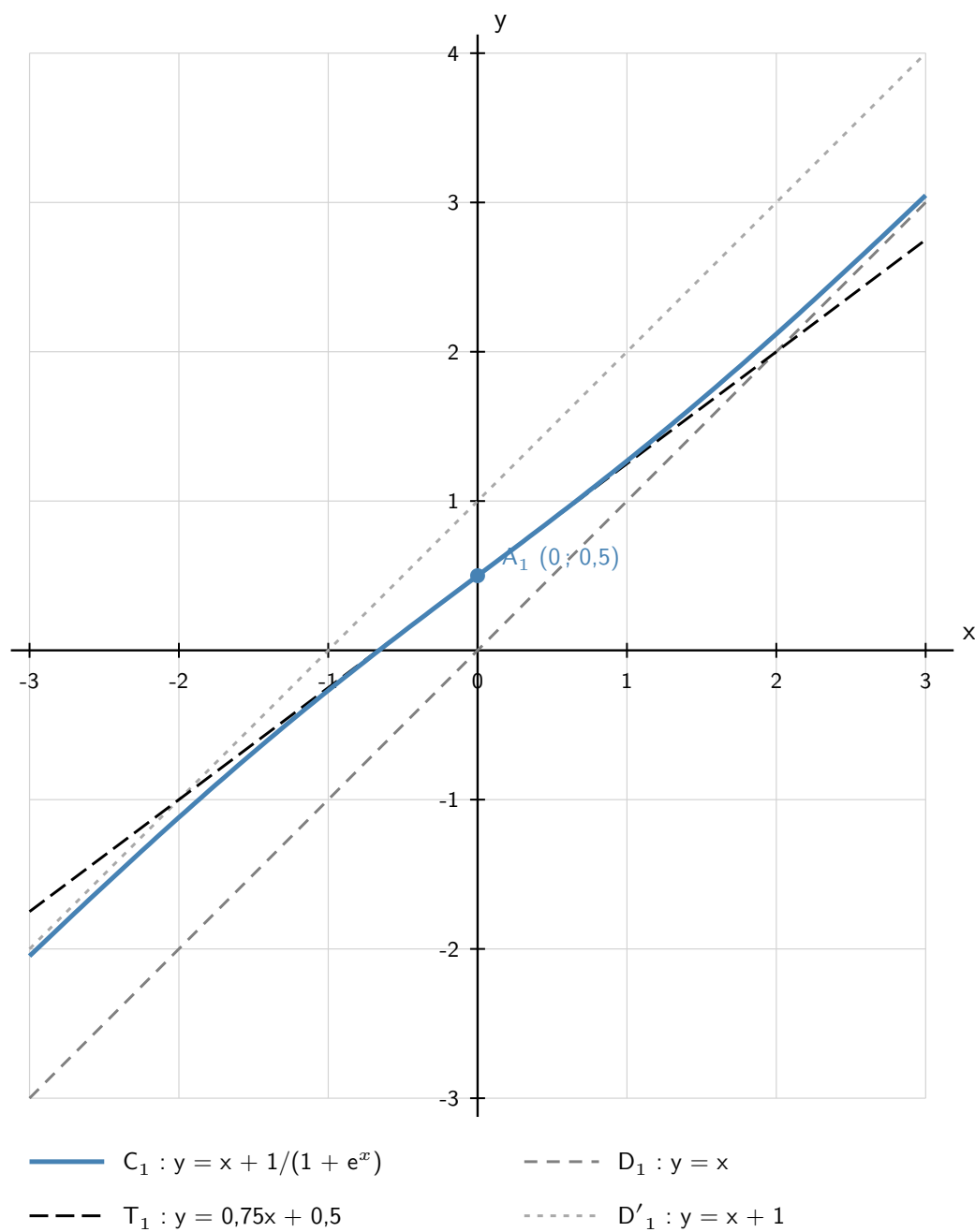
Ainsi (D_n) est asymptote en $+\infty$ et (D'_n) en $-\infty$. De plus $0 < 1/(1 + e^x) < 1$ pour tout x : la courbe est strictement au-dessus de (D_n) et strictement au-dessous de (D'_n) .

- 2) c) Le dénominateur de f''_n et le facteur e^x sont strictement positifs. Le signe de $f''_n(x)$ est donc celui de $e^x - 1$, négatif pour $x < 0$, nul en 0 et positif pour $x > 0$. La courbe passe de la concavité à la convexité en $x = 0$, et n'a aucun autre changement de convexité. Son unique point d'inflexion est donc $A_n = (0, 1/2)$.

- 2) d) On a $f_1(0) = 1/2$ et $f'_1(0) = 1 - 1/4 = 3/4$. L'équation de la tangente demandée est :

$$(T_1) : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Pour le tracé, (C_1) est strictement croissante, concave sur $] -\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. Elle s'approche de $y = x + 1$ en $-\infty$ et de $y = x$ en $+\infty$, en restant entre ces deux droites. Le point $A_1 = (0, 1/2)$ est le point de contact avec (T_1) . Le dessin suivant représente ces quatre courbes avec la même échelle sur les deux axes.



- 3) a) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses limites aux deux extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection garantit donc une unique solution réelle u_n de $f_n(x) = 0$.

3) b) On calcule :

$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0, \quad f_n(-1/n) = \frac{1}{1 + e^{-1/n}} - 1 = -\frac{e^{-1/n}}{1 + e^{-1/n}} < 0.$$

La continuité et la stricte croissance donnent $-1/n < u_n < 0$ pour tout $n \geq 1$.

3) c) Les deux bornes $-1/n$ et 0 tendent vers 0 . Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3) d) L'égalité $f_n(u_n) = 0$ s'écrit :

$$nu_n = -\frac{1}{1 + e^{u_n}}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, la continuité de l'exponentielle donne $nu_n \rightarrow -1/2$. Ainsi $u_n/(-1/(2n)) = -2nu_n \rightarrow 1$, ce qui établit $u_n \sim -1/(2n)$. Aucune composition injustifiée d'équivalents n'intervient : on utilise directement une limite.

Exercice 2

1) a) Un calcul matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 32 & 28 \\ 4 & 16 & 12 \\ -8 & -24 & -20 \end{pmatrix},$$

$$(A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

En multipliant par A , chaque coefficient du produit est nul, d'où $A(A - 2I)^2 = 0$.

Si λ est une valeur propre et $z \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $(A - 2I)z = (\lambda - 2)z$, donc $0 = A(A - 2I)^2 z = \lambda(\lambda - 2)^2 z$. Puisque $z \neq 0$, on obtient $\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont 0 et 2.

1) b) Les produits donnent :

$$f(u) = (12 + 10 - 22, 4 + 6 - 10, -8 - 8 + 16) = (0, 0, 0),$$

$$f(v) = (18 + 10 - 22, 6 + 6 - 10, -12 - 8 + 16) = (6, 2, -4) = 2v.$$

Les vecteurs u, v sont non nuls : 0 et 2 sont donc effectivement valeurs propres. D'après

1) a), $\text{Sp}(f) = \{0, 2\}$.

1) c) Le noyau de f contient le vecteur non nul u . Ainsi f n'est pas injectif, donc n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) a) Pour établir la liberté sans déterminant, supposons $au + bv + cw = 0$. Les trois coordonnées donnent :

$$2a + 3b - 2c = 0, \quad a + b = 0, \quad -2a - 2b + c = 0.$$

La deuxième égalité et la troisième donnent $c = 0$. Avec $a = -b$, la première devient $b = 0$, puis $a = 0$. La famille est donc libre ; elle comporte trois vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc c'est une base.

2) b) On calcule $f(w) = (-12 + 11, -4 + 5, 8 - 8) = (-1, 1, 0)$. Or

$$v + 2w = (3 - 4, 1, -2 + 2) = (-1, 1, 0), \text{ donc } f(w) = v + 2w.$$

Dans la base (u, v, w) , les coordonnées de $f(u), f(v), f(w)$ sont respectivement $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 1, 2)$. Ces coordonnées forment les colonnes de la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) c) Méthode 1 — Étudier les espaces propres dans la nouvelle base.

Pour $z = au + bv + cw$, on a $f(z) = (2b + c)v + 2cw$. L'égalité $f(z) = 0$ impose $c = 0$ puis $b = 0$: l'espace propre pour 0 est $\text{Vect}(u)$. L'égalité $f(z) = 2z$ impose $a = 0$ et $c = 0$: l'espace propre pour 2 est $\text{Vect}(v)$.

Tous les vecteurs propres appartiennent donc au plan $\text{Vect}(u, v)$. On ne peut pas construire une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres ; f n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Examiner le produit $A(A - 2I)$.

D'après 1) a) :

$$A(A - 2I) = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Si A était semblable à une matrice diagonale H , chaque coefficient diagonal de H serait une valeur propre de A , donc vaudrait 0 ou 2. Ainsi $H(H - 2I) = 0$ et, en transportant ce produit par la similitude, $A(A - 2I) = 0$, contradiction. Cette preuve utilise seulement la définition de la diagonalisation et le produit des matrices diagonales.

La première méthode donne les espaces propres ; la seconde détecte plus rapidement l'impossibilité d'une diagonalisation à partir d'un produit simple.

- 3) a) La seule entrée non nulle de N est celle de la deuxième ligne, troisième colonne, d'où $N^2 = 0$. On vérifie également $DN = ND = 2N$; les matrices commutent, hypothèse indispensable du binôme matriciel.

Pour $n \geq 1$, le binôme donne

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Tous les termes d'indice $k \geq 2$ sont nuls. Les deux termes restants donnent bien :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N.$$

Cette égalité vaut aussi pour $n = 1$, avec $D^0 = I$.

3) b) Pour $n \geq 1$, D^n a pour diagonale $(0, 2^n, 2^n)$ et $D^{n-1}N = 2^{n-1}N$, y compris lorsque $n = 1$. Par conséquent :

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3) c) La matrice de passage dont les colonnes sont u, v, w est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible puisque ses colonnes constituent une base. Pour déterminer son inverse, écrivons $(x, y, z) = au + bv + cw$. Les équations sont $x = 2a + 3b - 2c$, $y = a + b$ et $z = -2a - 2b + c$. On obtient successivement $c = z + 2y$, $b = x + 2y + 2z$ puis $a = -x - y - 2z$. Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de base donne $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$.

3) d) Pour $n = 1$, l'égalité est celle de 3) c). Si $A^n = PT^nP^{-1}$ pour un entier $n \geq 1$, alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1},$$

car $P^{-1}P = I$. La récurrence établit $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 1$.

3) e) Posons $a = 2^n$ et $b = n2^{n-1}$. Les deux produits successifs s'écrivent :

$$PT^n = \begin{pmatrix} 0 & 3a & 3b - 2a \\ 0 & a & b \\ 0 & -2a & -2b + a \end{pmatrix},$$

$$PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3a & 2a + 6b & 4a + 3b \\ a & 2a + 2b & 2a + b \\ -2a & -2a - 4b & -3a - 2b \end{pmatrix}.$$

En remplaçant a, b , on conclut, pour $n \geq 1$:

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 6 & 6n+4 & 3n+8 \\ 2 & 2n+4 & n+4 \\ -4 & -4n-4 & -2n-6 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, cette expression redonne la matrice A .

Exercice 3

- 1) Sur tout segment $[0, b]$, avec $b \geq 0$, la fonction intégrée est continue et admet la primitive $x \mapsto -1/(1+x)$. Ainsi :

$$\int_0^b \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1 - \frac{1}{1+b} \rightarrow 1 \quad (b \rightarrow +\infty).$$

L'intégrale généralisée converge et vaut 1.

- 2) a) Pour tout réel x , $|-x| = |x|$, donc $f(-x) = f(x)$. La fonction f est paire.
- 2) b) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Par parité et d'après 1), les deux intégrales sur les demi-droites convergent et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2} dx = 1.$$

Ainsi f est une densité de probabilité ; elle possède en particulier des limites finies à gauche et à droite en chaque point réel.

- 3) a) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé précise $X(\Omega) = \mathbb{R}$, afin que la question sur l'image exacte soit déterminée par les hypothèses, et pas seulement sur le support de la loi.

Pour tout réel x , $\ln(1 + |x|) \geq 0$. Réciproquement, pour tout $y \geq 0$, le réel $x = e^y - 1 \geq 0$ vérifie $\ln(1 + |x|) = y$. L'image de $\mathbb{R}$ par cette transformation est donc $[0, +\infty[$, d'où $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

3) b) Pour $y < 0$, l'événement $[Y \leq y]$ est vide, donc $G(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, la croissance du logarithme et de l'exponentielle donne :

$$[Y \leq y] = [|X| \leq e^y - 1] = [1 - e^y \leq X \leq e^y - 1].$$

Comme X est à densité, chaque valeur isolée a une probabilité nulle. Par conséquent :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ F(e^y - 1) - F(1 - e^y) & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

3) c) La continuité de F implique la continuité de G sur les deux demi-droites ; en 0, la formule de droite tend vers $F(0) - F(0) = 0$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

La densité f est continue, donc F est de classe C^1 et $F' = f$. Pour $y > 0$, en dérivant les deux compositions :

$$G'(y) = e^y f(e^y - 1) + e^y f(1 - e^y) = 2e^y f(e^y - 1),$$

la dernière égalité résultant de la parité de f . Pour $y < 0$, $G'(y) = 0$. On peut choisir en 0 la valeur $g(0) = 2f(0) = 1$: une valeur isolée ne modifie pas une densité. La fonction g proposée est positive, continue en dehors de 0, et ses limites en 0 sont finies. C'est donc bien une densité de Y dans le cadre du programme.

3) d) Méthode 1 — Identifier la densité.

Pour $y \geq 0$, on a $e^y - 1 \geq 0$, donc $1 + |e^y - 1| = e^y$. Ainsi :

$$g(y) = \frac{2e^y}{2(e^y)^2} = e^{-y}.$$

Avec $g(y) = 0$ pour $y < 0$, on reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre 1 : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Méthode 2 — Calculer la probabilité de dépassement.

Pour $a \geq 0$, par parité et par le calcul de 1) sur $[a, b]$ puis passage à la limite :

$$P(|X| > a) = 2 \int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{1+a}.$$

Pour $y \geq 0$, il vient $P(Y > y) = P(|X| > e^y - 1) = e^{-y}$. Puisque $Y \geq 0$, sa fonction de répartition est nulle pour $y < 0$ et vaut $1 - e^{-y}$ pour $y \geq 0$: c'est encore la loi $\mathcal{E}(1)$.

La première méthode exploite la densité déjà obtenue ; la seconde permet souvent de reconnaître directement la loi d'une transformation croissante de $|X|$.

Problème

Partie 1 : préliminaires

- 1) a) La dérivée f' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle y est bornée : il existe $K \geq 0$ tel que $|f'(t)| \leq K$ pour tout t de ce segment. Prenons $M = K + 1 > 0$.
L'inégalité des accroissements finis, appliquée à f sur $[0, 1]$, donne alors :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Ce résultat provient de la régularité C^1 ; on ne suppose pas connue une formule générale sur les sommes qui seront étudiées ensuite.

- 1) b) Pour les indices et le réel t considérés, t et k/n appartiennent à $[0, 1]$ et $t \geq k/n$.
L'inégalité de 1) a) donne donc directement :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left| t - \frac{k}{n} \right| = M \left(t - \frac{k}{n} \right).$$

- 1) c) L'intervalle d'intégration est de longueur $1/n$. Par linéarité puis par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale de fonctions continues :

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right|,$$

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{M}{2n^2}.$$

La majoration utilise 1) b), valable sur tout le segment concerné.

- 1) d) Par Chasles, l'intégrale sur $[0, 1]$ est la somme des intégrales sur les n segments successifs. L'inégalité triangulaire pour une somme finie, puis 1) c), donne :

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

- 1) e) Le réel M est indépendant de n et $M/(2n) \rightarrow 0$. La majoration de 1) d) montre que la différence entre la somme et l'intégrale tend vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

La convergence particulière requise est entièrement démontrée par les questions précédentes.

- 2) a) Pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$, les fonctions $u(x) = (1-x)^q$ et $v(x) = x^{p+1}/(p+1)$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $u' = -q(1-x)^{q-1}$ et $v' = x^p$. L'intégration par parties est

donc permise :

$$I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Le terme de bord est nul : à 0, $x^{p+1} = 0$; à 1, $(1-x)^q = 0$ puisque $q \geq 1$. On obtient

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

2) b) Si $q = 0$, la formule demandée se réduit à $I(p, 0) = I(p, 0)$, avec $0! = 1$. Si $q \geq 1$, on applique q fois la relation précédente, jusqu'à annuler le second argument :

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{1}{p+q} I(p+q, 0).$$

Le produit des numérateurs vaut $q!$ et celui des dénominateurs vaut $(p+q)!/p!$. D'où

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) \text{ dans tous les cas.}$$

2) c) Puisque $p+q \geq 0$, une primitive de x^{p+q} est $x^{p+q+1}/(p+q+1)$ et :

$$I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \frac{1}{p+q+1}.$$

En substituant dans 2) b), on obtient $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ pour tous entiers naturels p, q .

3) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python : la relation de récurrence entre intégrales est évaluée par une boucle, sans supposer la récursivité connue.

Python

```
def i(p, q):
    a = 1 / (p + q + 1)
    for j in range(q):
        a = a * (q - j) / (p + j + 1)
    return a
```

Les arguments p et q sont des entiers naturels. Initialement, a vaut $I(p + q, 0)$. À chaque tour on multiplie par le facteur $(q - j)/(p + j + 1)$; tous les dénominateurs sont strictement positifs. Après q tours, le produit accumulé est précisément celui de 2) b). Pour $q = 0$, la boucle ne s'exécute pas et la valeur renvoyée est $1/(p + 1)$, également correcte.

Cette fonction a été exécutée, notamment pour les cas $q = 0$, $p = 0$ et pour plusieurs couples positifs ; les valeurs concordent avec la formule exacte à la précision des calculs en nombres flottants. L'explication par le produit établit sa correction pour tous les arguments prévus.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

- 1) Question adaptée au programme actuel : le domaine du paramètre et les cas limites sont explicités dans l'énoncé.

Toute variable binomiale est à valeurs dans un ensemble fini ; son espérance et tous les moments utilisés existent. Pour $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, on a $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1 - p)$.

Méthode 1 — Utiliser la variance.

La formule de Koenig-Huygens donne $E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 = mp(1 - p) + m^2p^2$.
Par linéarité :

$$E(Y(Y - 1)) = E(Y^2) - E(Y) = mp(1 - p) + m^2p^2 - mp = m(m - 1)p^2.$$

Méthode 2 — Décomposer le nombre de succès.

On représente Y comme la somme de m indicatrices de succès indépendantes

$B_1, \dots, B_m$, de loi de Bernoulli de paramètre p . Comme $B_j^2 = B_j$, on a

$$Y(Y-1) = \sum_{j \neq k} B_j B_k.$$

Pour $j \neq k$, l'indépendance donne $E(B_j B_k) = E(B_j)E(B_k) = p^2$. Parmi les couples ordonnés (j, k) , il y en a $m(m-1)$ avec $j \neq k$, donc $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$.

Les deux raisonnements restent valables pour $p = 0$ et $p = 1$. Le premier est le plus rapide lorsqu'on connaît la variance; le second interprète ce moment comme un comptage de paires de succès.

2) La variable U_1 vaut 0 avec probabilité 1. La loi conditionnelle de X_1 sachant cet événement certain est donc $\mathcal{B}(m, 0) : P(X_1 = 0) = 1$. Ainsi X_1 suit la loi certaine en 0.

3) a) Chaque loi conditionnelle est portée par $\llbracket 0, m \rrbracket$, donc X_n prend ses valeurs dans cet ensemble. Lorsque $n \geq 2$, l'événement $[U_n = 1/n]$ a la probabilité strictement positive $1/n$, et le paramètre $1/n$ appartient à $]0, 1[$: sa loi binomiale donne une probabilité strictement positive à chacun des entiers de 0 à m . Tous ces entiers sont donc effectivement possibles : $X_n(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$.

Les événements $[U_n = k/n]$, pour $0 \leq k \leq n-1$, constituent un système complet et sont de probabilité $1/n > 0$. La formule des probabilités totales donne pour $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} P(X_n = i \mid U_n = k/n) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

La convention de l'énoncé rend le terme $k = 0, i = 0$ égal à 1, conformément à la loi certaine $\mathcal{B}(m, 0)$.

3) b) À k fixé, la somme demandée est l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(m, k/n)$, donc vaut mk/n , d'après 1). Le terme $i = 0$ est nul et peut être ajouté.

Comme toutes les sommes sont finies, on peut les permuter sans condition supplémentaire :

$$E(X_n) = \sum_{i=0}^m iP(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i},$$

$$E(X_n) = \frac{m}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{m}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

L'existence de cette espérance est assurée dès le départ par $0 \leq X_n \leq m$.

- 3) c) D'après 1), la somme demandée vaut $m(m-1)(k/n)^2$. Le terme $i = 0$ est nul. En utilisant le transfert, puis la permutation de sommes finies et la somme des carrés :

$$E(X_n(X_n - 1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(m-1) \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{m(m-1)}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2,$$

$$E(X_n(X_n - 1)) = \frac{m(m-1)}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

La variable intégrée est bornée puisque X_n est à valeurs dans un ensemble fini, donc le moment existe.

- 3) d) Les moments d'ordre 1 et 2 existent. On écrit $X_n^2 = X_n(X_n - 1) + X_n$, puis on applique Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \frac{m^2(n-1)^2}{4n^2}.$$

En factorisant $m(n-1)/(12n^2)$, le facteur restant est :

$$2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1),$$

$$2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1) = 4mn - 2m - 4n + 2 + 6n - 3mn + 3m = (m+2)(n+1).$$

Par conséquent $V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$, comme annoncé.

- 4) a) Pour un entier fixé $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, la fonction $h_i(t) = t^i(1-t)^{m-i}$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $[0, 1]$, y compris pour $i = 0$ ou $i = m$. On peut lui appliquer le résultat démontré en partie 1, 1) e) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_i(k/n) \longrightarrow \int_0^1 t^i(1-t)^{m-i} dt = I(i, m-i).$$

La partie 1, 2) c), donne $I(i, m-i) = i!(m-i)!/(m+1)!$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i) = \binom{m}{i} \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1}.$$

On a vérifié ici la régularité de chaque fonction employée, plutôt que d'invoquer sans justification un résultat de sommes de Riemann.

- 4) b) Considérons une variable X uniforme sur $\llbracket 0, m \rrbracket$: ses $m+1$ masses valent $1/(m+1)$. Pour tout entier i de cet ensemble, les probabilités $P(X_n = i)$ tendent vers $P(X = i)$ d'après 4) a). Pour tout autre entier, les deux probabilités sont nulles. Toutes les variables étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, la caractérisation de la convergence en loi par les probabilités ponctuelles donne :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X \text{ en loi, } \quad X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, m \rrbracket).$$

- 4) c) La loi uniforme sur les $m+1$ entiers consécutifs $0, \dots, m$ a pour espérance $E(X) = m/2$ et pour variance $V(X) = ((m+1)^2 - 1)/12 = m(m+2)/12$.

D'autre part, les formules établies en 3) b) et 3) d) donnent directement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n-1)}{2n} = \frac{m}{2} = E(X),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} = \frac{m(m+2)}{12} = V(X).$$

Ces convergences sont vérifiées par les expressions explicites ; elles ne sont pas déduites d'un principe général qui ferait converger les moments à partir de la seule convergence en loi.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule : notation I explicitée comme matrice identité d'ordre 3.
- Exercice 3, 3) a) et préambule de X : réalisation $X(\Omega) = \mathbb{R}$ explicitée pour rendre déterminée la demande sur l'image exacte $Y(\Omega)$; la densité et tous les calculs de loi restent inchangés.
- Problème, partie 1, 3) : Code adapté en Python ; la déclaration récursive ancienne est remplacée par une boucle qui évalue le même produit, à partir de la relation de 2) a). La récursivité n'est pas supposée connue ; les deux blancs à compléter sont conservés.
- Problème, partie 2, préambule et 1), 2), 3) a), 4) a) : convention $0^0 = 1$, loi binomiale dégénérée de paramètre 0 et domaine $p \in [0, 1]$ explicités pour couvrir les valeurs limites déjà utilisées dans l'original.