



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) Il faut vérifier que l'application est définie à valeurs dans le même espace et qu'elle est linéaire. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sa transposée et leur somme sont encore des matrices réelles d'ordre 2.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de la transposition donne :

$$\varphi(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N + \alpha^t M + \beta^t N = \alpha \varphi(M) + \beta \varphi(N).$$

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 1) b) Les colonnes de la matrice cherchée sont les coordonnées des images des quatre matrices de la base. Par transposition :

$$\varphi(E_1) = 2E_1, \quad \varphi(E_2) = E_2 + E_3, \quad \varphi(E_3) = E_2 + E_3, \quad \varphi(E_4) = 2E_4.$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) c) Méthode 1 — Utiliser la symétrie de la matrice.

La matrice réelle A vérifie ${}^t A = A$. Le théorème du programme sur les matrices symétriques réelles assure donc qu'elle est diagonalisable. Par représentation matricielle, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

D'autre part, $E_2 - E_3 \neq 0$ et $\varphi(E_2 - E_3) = 0$, d'après les images calculées en 1) b). Le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$: φ n'est pas injectif, donc n'est pas bijectif.

Méthode 2 — Construire une base de vecteurs propres.

Les égalités de 1) b) donnent :

$$\varphi(E_1) = 2E_1, \quad \varphi(E_2 + E_3) = 2(E_2 + E_3), \quad \varphi(E_4) = 2E_4, \quad \varphi(E_2 - E_3) = 0.$$

La famille $(E_1, E_2 + E_3, E_4, E_2 - E_3)$ est libre : une combinaison nulle de coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ impose, par lecture des quatre coefficients matriciels, $\alpha = \gamma = 0, \beta + \delta = 0$ et $\beta - \delta = 0$, donc tous les coefficients sont nuls.

Elle comporte quatre éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base. Dans cette base, la matrice de φ est $\text{diag}(2, 2, 2, 0)$. L'endomorphisme est donc diagonalisable et non bijectif, puisque son noyau contient le vecteur non nul $E_2 - E_3$.

La première approche utilise directement le théorème de symétrie ; la seconde donne en plus les directions propres, qui seront utiles à la fin de l'exercice.

2) Le produit matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A.$$

La formule $A^n = 2^{n-1}A$ est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie à un rang $n \geq 1$, alors :

$$A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1} A^2 = 2^n A.$$

La récurrence établit donc $A^n = 2^{n-1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) a) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = 2aE_1 + (b+c)(E_2 + E_3) + 2dE_4.$$

Cela prouve l'inclusion de l'image dans $\text{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$. Inversement, $E_1 = \varphi(E_1/2)$, $E_2 + E_3 = \varphi(E_2)$ et $E_4 = \varphi(E_4/2)$ appartiennent à l'image. Celle-ci étant un sous-espace vectoriel, elle contient leur espace engendré. Ainsi :

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4).$$

Si $\alpha E_1 + \beta(E_2 + E_3) + \gamma E_4 = 0$, la lecture du coefficient supérieur gauche, du coefficient supérieur droit et du coefficient inférieur droit donne successivement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est libre et génératrice de l'image : c'est une base, donc $\dim \text{Im } \varphi = 3$.

3) b) L'endomorphisme agit sur un espace de dimension 4. Le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Ker } \varphi = 4 - \dim \text{Im } \varphi = 1.$$

Le vecteur $E_2 - E_3$ est non nul et appartient au noyau, d'après 1) c). Il en constitue donc une base :

$$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(E_2 - E_3).$$

3) c) Notons $E_2(\varphi) = \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \varphi(N) = 2N\}$.

L'identité $A^2 = 2A$ équivaut à $\varphi^2 = 2\varphi$. Si N appartient à l'image, il existe M tel que $N = \varphi(M)$, d'où $\varphi(N) = \varphi^2(M) = 2\varphi(M) = 2N$. Ainsi $\text{Im } \varphi \subset E_2(\varphi)$.

Réciproquement, si $\varphi(N) = 2N$, alors $N = \varphi(N/2)$, donc $N \in \text{Im } \varphi$. Les deux inclusions donnent $\text{Im } \varphi = E_2(\varphi)$. Cet espace n'étant pas réduit à $\{0\}$, 2 est bien une valeur propre.

- 3) d) Si λ est une valeur propre et $M \neq 0$ un vecteur propre associé, l'égalité $\varphi^2(M) = 2\varphi(M)$ donne $\lambda^2 M = 2\lambda M$. Comme $M \neq 0$, $\lambda(\lambda - 2) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont donc 0 et 2, et elles sont toutes deux effectivement présentes d'après les questions précédentes.

Pour 0, une base du sous-espace propre est $(E_2 - E_3)$.

Pour 2, une base du sous-espace propre est $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$.

Exercice 2

- 1) a) Les événements $[U = 1]$ et $[U = -1]$ forment un système complet. La formule des probabilités totales, dans sa forme avec intersections, donne :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [Y \leq x]) + P([U = -1] \cap [Y \leq x]).$$

Sur $[U = 1]$, on a $Y = X$; sur $[U = -1]$, on a $Y = -X$, et $Y \leq x$ équivaut à $X \geq -x$. Cela fournit exactement :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x]).$$

- 1) b) Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'indépendance de U et X , et les probabilités $P(U = 1) = P(U = -1) = 1/2$, donnent :

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x).$$

Une variable à densité ne charge aucun point, donc $P(X \geq -x) = 1 - \Phi(-x)$. La symétrie de la loi normale centrée réduite s'écrit $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ainsi

$$P(Y \leq x) = \Phi(x) \text{ pour tout réel } x.$$

Les fonctions de répartition étant égales, Y suit la même loi que X , à savoir $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 2) a) La variable U est bornée, donc admet une espérance, et :

$$E(U) = (-1)\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0.$$

Comme X est normale centrée réduite, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$. Le lemme des coalitions appliqué à l'indépendance de U et X donne l'indépendance de U et X^2 .

Les deux variables U et X^2 admettent une espérance. Le résultat sur l'espérance du produit de variables indépendantes s'applique donc :

$$E(XY) = E(UX^2) = E(U)E(X^2) = 0.$$

L'existence de cette espérance peut aussi se vérifier directement par $|XY| = |U|X^2 = X^2$, dont l'espérance est finie.

- 2) b) Les variables X et Y suivent toutes deux $\mathcal{N}(0, 1)$; leurs moments d'ordre 2 sont donc finis et leurs espérances nulles. Le produit a une espérance par 2) a). La formule de covariance admise donne :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

- 3) a) On a $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$. En écrivant le transfert pour $x \mapsto x^2$ avec la densité normale :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1.$$

L'intégrande est positive et paire. L'intégrale sur $[0, +\infty[$ est donc convergente et vaut la moitié de l'intégrale totale :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

- 3) b) Pour $A \geq 0$, on effectue l'intégration par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = -e^{-x^2/2}$. Ces deux fonctions sont de classe C^1 et $v'(x) = xe^{-x^2/2}$. Ainsi :

$$\int_0^A x^4 e^{-x^2/2} dx = [-x^3 e^{-x^2/2}]_0^A + 3 \int_0^A x^2 e^{-x^2/2} dx.$$

La contribution en 0 étant nulle, on obtient la formule demandée. Elle reste valable pour $A = 0$, les deux membres étant alors nuls.

- 3) c) Pour étudier le terme de bord, posons $s = A^2/2$. Lorsque $A \rightarrow +\infty$, on a $s \rightarrow +\infty$ et :

$$A^3 e^{-A^2/2} = (2s)^{3/2} e^{-s} \rightarrow 0,$$

par croissance comparée entre une puissance et l'exponentielle. D'après 3) a), le second terme du membre de droite de 3) b) tend vers $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$. Par conséquent :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^4 e^{-x^2/2} dx = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}.$$

C'est exactement la convergence de l'intégrale généralisée et la valeur annoncée. L'intégration par parties a été appliquée sur segment avant ce passage à la limite.

- 3) d) L'intégrande $x^4 e^{-x^2/2}$ est positive et paire. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge donc et vaut $3\sqrt{2\pi}$, d'après 3) c). Le transfert pour $x \mapsto x^4$, avec convergence absolue puisque l'intégrande est positive, donne :

$$E(X^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx = 3.$$

Ainsi X possède bien un moment d'ordre 4.

- 4) a) Comme U ne prend que les valeurs -1 et 1 , on a $U^2 = 1$. Il en résulte :

$$X^2 Y^2 = X^2 (UX)^2 = U^2 X^4 = X^4.$$

Cette variable a une espérance finie par 3) d), donc $E(X^2 Y^2) = E(X^4) = 3$.

- 4) b) Question adaptée au programme actuel : le rappel admis du sujet est étendu au seul couple (X^2, Y^2) , sans exiger une étude de densités des carrés.

La variable X a un moment d'ordre 4, et Y aussi puisqu'elle suit la même loi. Ainsi X^2 et Y^2 ont chacune un moment d'ordre 2. Le produit a une espérance par 4) a). Toutes les quantités de la formule admise sont donc définies :

$$\text{Cov}(X^2, Y^2) = E(X^2 Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 3 - 1 \times 1 = 2.$$

4) c) Méthode 1 — Utiliser la covariance puis le lemme des coalitions.

L'indépendance de X^2 et Y^2 impliquerait, par le rappel admis appliqué à ces variables de moments d'ordre 2 finis, une covariance nulle. Or cette covariance vaut 2. Les variables X^2 et Y^2 ne sont donc pas indépendantes.

Si X et Y étaient indépendantes, le lemme des coalitions donnerait l'indépendance de leurs fonctions X^2 et Y^2 . Cette conséquence est fautive ; par l'absurde, X et Y ne sont pas indépendantes.

Méthode 2 — Exhiber des événements incompatibles avec l'indépendance.

On a $Y^2 = X^2$, donc les événements $A = [X^2 \leq 1]$ et $B = [Y^2 \leq 1]$ sont égaux. Posons $p = P(A) = P(-1 \leq X \leq 1)$. La densité normale est strictement positive sur $[-1, 1]$ et sur $[2, 3]$: l'intégration sur ces segments montre respectivement que $p > 0$ et $p < 1$.

Par conséquent $P(A \cap B) = p$, tandis que $P(A)P(B) = p^2 \neq p$. Cela prouve directement que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Les mêmes événements s'écrivent $A = [X \in [-1, 1]]$ et $B = [Y \in [-1, 1]]$; ils donnent donc également un contre-exemple direct à l'indépendance de X et Y .

La première méthode exploite les moments calculés par l'exercice ; la seconde permet de reconnaître la dépendance à partir de l'égalité des valeurs absolues, sans calcul supplémentaire de moments.

4) d) Une covariance nulle n'implique pas l'indépendance. Ici, X et Y sont deux variables à densité dont la covariance est nulle, d'après 2) b), alors qu'elles ne sont pas indépendantes, d'après 4) c). La réciproque de l'implication « indépendance entraîne covariance nulle », lorsque ces quantités existent, est donc fautive aussi pour les variables à densité.

Exercice 3

1) a) Méthode 1 — Étudier une fonction auxiliaire.

La fonction $h(x) = x - \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $h'(x) = 1 - 1/x = (x - 1)/x$. Sa dérivée est négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$. Elle admet donc un minimum global en 1, de valeur $h(1) = 1$. Ainsi $x - \ln x \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Utiliser la tangente au logarithme.

La fonction logarithme est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée seconde vaut $-1/x^2 < 0$: elle est concave. Son graphe se situe donc au-dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = x - 1$. Ainsi $\ln x \leq x - 1$, ce qui donne encore $x - \ln x \geq 1 > 0$.

La première démarche construit l'inégalité par variations ; la seconde la reconnaît comme une inégalité de tangente d'une fonction concave.

1) b) Pour $x > 0$, le logarithme est défini et le dénominateur ne s'annule pas, d'après 1)

a). La valeur en 0 est donnée séparément. Aucune expression n'est définie pour $x < 0$ dans cet énoncé. Par conséquent $D = [0, +\infty[$.

2) a) Sur $]0, +\infty[$, f est un quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul : elle est continue.

Pour vérifier le raccord en 0, écrivons, pour $x > 0$:

$$f(x) + 1 = \frac{x}{x - \ln x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$. Le quotient tend donc vers 0, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$. Ainsi f est continue sur tout D .

2) b) On utilise directement la définition de la dérivée à droite, sans théorème de prolongement de la dérivée. Pour $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) + 1}{x} = \frac{1}{x - \ln x}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ce taux d'accroissement tend donc vers 0. Par conséquent f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

- 3) a) Sur $]0, +\infty[$, le numérateur et le dénominateur sont dérivables et le dénominateur est non nul. La formule de dérivation d'un quotient donne :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \ln x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

Les deux termes en $\ln x/x$ se compensent dans le numérateur. Cette formule vaut pour tout $x \in D \setminus \{0\}$.

- 3) b) On divise le numérateur et le dénominateur par $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln x/x}{1 - \ln x/x}.$$

La croissance comparée $\ln x/x \rightarrow 0$ donne un numérateur tendant vers 0 et un dénominateur tendant vers 1. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 3) c) Le dénominateur de f' est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - \ln x$: positif pour $0 < x < e$, nul pour $x = e$, négatif pour $x > e$.

On a $f(0) = -1$, $f(e) = 1/(e - 1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de f' sur les intervalles	+	0	—
Valeur et variation de f	-1	$\nearrow \frac{1}{e-1}$	$\searrow 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $[0, e]$ puis strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Le maximum global est $1/(e-1)$, atteint en e .

- 4) Pour $x > 0$, le dénominateur est positif. Le signe de $f(x)$ est donc celui de $\ln x$: négatif sur $]0, 1[$, nul en 1, positif sur $]1, +\infty[$. Comme $f(0) = -1$, on conclut que $f < 0$ sur $[0, 1[$, $f(1) = 0$ et $f > 0$ sur $]1, +\infty[$.
- 5) a) Pour tout $x \geq 0$, f est continue sur le segment $[0, x]$, donc l'intégrale définissant $F(x)$ existe. Le théorème sur l'intégrale d'une fonction continue donne $F'(x) = f(x)$ pour $x > 0$.

À la borne 0, on peut préciser directement la dérivée à droite. Pour $h > 0$, $F(0) = 0$ et :

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} - f(0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de f en 0 fournit $\eta > 0$ tel que $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ sur $[0, \eta]$. Le membre de droite est alors au plus ε si $0 < h \leq \eta$. Ainsi $F'_d(0) = f(0) = -1$.

La dérivée, interprétée à droite à la borne, est donc la fonction continue f sur D : F est de classe C^1 sur D dans ce sens.

D'après le signe de f , F est strictement décroissante sur $[0, 1]$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet un minimum global en 1, égal à $F(1) = \int_0^1 f(t) dt < 0$. La stricte négativité résulte de la continuité de f et de $f(t) < 0$ sur $[0, 1]$.

- 5) b) Pour $x \geq 1$, une primitive de $t \mapsto \ln t/t$ est $t \mapsto (\ln t)^2/2$. Donc :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Comme $\ln x \rightarrow +\infty$, cette intégrale tend vers $+\infty$.

- 5) c) Pour $t \geq 1$, on a $0 < t - \ln t \leq t$ et $\ln t \geq 0$. Par division par des quantités positives :

$$\frac{\ln t}{t - \ln t} \geq \frac{\ln t}{t}.$$

En intégrant cette inégalité entre 1 et $x \geq 1$, on obtient :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt \geq \frac{1}{2}(\ln x)^2 \rightarrow +\infty.$$

La minoration suffit à établir que l'intégrale du membre de gauche tend vers $+\infty$. Enfin, par Chasles :

$$F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt.$$

Le terme $F(1)$ est une constante finie ; ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Problème

1) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

z = 0
hasard = 0

while hasard != 1:
    z = z + 1
    hasard = rd.randint(2)

print(z)
```

La variable z compte les lancers et $hasard$ code le dernier résultat. L'initialisation $hasard = 0$ impose l'entrée dans la boucle, donc au moins un lancer. Chaque passage ajoute 1 au compteur puis réalise un tirage équiprobable dans $\{0, 1\}$. La boucle s'arrête au premier 1 : la valeur affichée est bien le rang Z du premier pile.

La probabilité de poursuivre au-delà de n lancers est 2^{-n} , qui tend vers 0 : la simulation s'arrête presque sûrement. Ce bloc a été exécuté, et son comportement a aussi été vérifié pour des suites imposées de résultats.

1) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Il suffit d'ajouter l'instruction `print(rd.randint(1, z + 1))`. Voici le programme complet :

Python

```
import numpy.random as rd

z = 0
hasard = 0
while hasard != 1:
    z = z + 1
    hasard = rd.randint(2)
print(z)
print(rd.randint(1, z + 1))
```

Conditionnellement à la valeur z , le nouvel appel renvoie un entier équiprobable parmi $1, \dots, z$; la borne supérieure $z + 1$ est exclue par la commande. C'est exactement le tirage dans l'urne décrit dans l'énoncé. Le programme affiche d'abord Z , puis X .

Ce second bloc a été exécuté. Les bornes et l'uniformité conditionnelle ont été contrôlées pour plusieurs valeurs imposées de z ; une simulation illustre le modèle sans remplacer les démonstrations suivantes.

2) Pour tout $k \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{k}2^{-k} \leq 2^{-k}$. La série géométrique

$$\sum_{k \geq 1} 2^{-k}$$

converge, de raison $1/2$. Le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne donc la convergence de

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} 2^{-k}.$$

- 3) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des lancers successifs est explicitée dans le modèle.

Le rang du premier succès d'une suite d'épreuves indépendantes de même probabilité de succès $1/2$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$Z \sim \mathcal{G}(1/2), \quad P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Les formules du cours donnent $E(Z) = 1/(1/2) = 2$ et $V(Z) = (1 - 1/2)/(1/2)^2 = 2$.

- 4) a) Pour tout $k \geq 1$, $P(Z = k) = 2^{-k} > 0$, donc le conditionnement est défini. Sachant $Z = k$, l'urne contient exactement les numéros $1, \dots, k$, et le tirage est équiprobable. Par conséquent, pour tout $i \geq 1$:

$$P_{[Z=k]}(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

- 4) b) Les événements $[Z = k]$, pour $k \geq 1$, forment un système complet, la possibilité de ne jamais obtenir pile ayant une probabilité nulle. La formule des probabilités totales et 4) a) donnent :

$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k) P_{[Z=k]}(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} 2^{-k}, \quad i \geq 1.$$

La convergence de cette série est assurée par la question 2). Chaque entier $i \geq 1$ a une probabilité strictement positive, et aucune autre valeur n'est possible : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, à la convention sur l'événement nul de non-arrêt près.

- 4) c) On utilise exactement la permutation des sommes admise dans l'énoncé, sur des

termes positifs :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} 2^{-k}.$$

La somme intérieure comprend k termes identiques, donc vaut 2^{-k} . Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

La loi obtenue est donc bien normalisée.

- 5) a) Pour $k \geq i \geq 1$, on a $i/k \leq 1$. En multipliant la formule de 4) b) par i et en comparant les termes positifs :

$$iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k} 2^{-k} \leq \sum_{k=i}^{+\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-i}}{1 - 1/2} = 2^{1-i}.$$

C'est l'inégalité demandée.

- 5) b) Méthode 1 — Comparer la série définissant l'espérance.

Comme X est à valeurs positives, l'existence de son espérance équivaut à la convergence de

$$\sum_{i \geq 1} iP(X = i).$$

D'après 5) a), les termes sont positifs et majorés par 2^{1-i} . La série géométrique de ces majorants converge, avec somme 2. La comparaison prouve donc que $E(X)$ existe et est finie.

Méthode 2 — Comparer directement les variables du modèle.

Le numéro tiré dans une urne de Z boules vérifie $1 \leq X \leq Z$ presque sûrement. Or la variable positive Z admet une espérance finie, égale à 2. La comparaison avec cette variable intégrable assure que X admet une espérance et que $1 \leq E(X) \leq 2$.

La première preuve répond directement à l'indication de l'énoncé ; la seconde permet de reconnaître l'intégrabilité avant même d'explicitier la loi de X , grâce à sa construction.

- 5) c) L'existence de $E(X)$ a été établie. En utilisant la permutation des sommes admise et la formule

$$\sum_{i=1}^k i = k(k+1)/2 :$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{k} \sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) 2^{-k}.$$

Les séries géométriques usuelles donnent

$$\sum_{k \geq 1} 2^{-k} = 1$$

et

$$\sum_{k \geq 1} k 2^{-k} = 2.$$

Donc :

$$E(X) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}.$$

6) a) On multiplie la majoration de 5) a) par $i \geq 1$:

$$0 \leq i^2 P(X = i) \leq i 2^{1-i}.$$

La série

$$\sum_{i \geq 1} i 2^{1-i}$$

converge, puisqu'il s'agit de deux fois la série géométrique dérivée

$$\sum_{i \geq 1} i 2^{-i},$$

de somme 2. Par comparaison,

$$\sum_{i \geq 1} i^2 P(X = i)$$

converge. Ainsi X possède un moment d'ordre 2.

6) b) L'existence du moment d'ordre 2 est acquise. En utilisant la permutation des sommes admise et la somme des carrés du cours :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{k} \sum_{i=1}^k i^2,$$

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Le facteur k se simplifie puisque $k \geq 1$. On obtient donc :

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1)2^{-k}.$$

6) c) En développant les deux membres de l'identité demandée, on cherche :

$$2k^2 + 3k + 1 = ak^2 + (b-a)k + c.$$

L'identification donne $a = 2$, $b - a = 3$ et $c = 1$, d'où $a = 2$, $b = 5$ et $c = 1$. Ces valeurs vérifient l'identité pour tout réel k , donc en particulier pour tout entier $k \geq 1$.

6) d) Pour $|r| < 1$, les séries géométriques usuelles donnent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k = \frac{r}{1-r}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)r^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3}.$$

Pour $r = 1/2$, leurs sommes valent respectivement 1, 2 et 4. En reportant l'identité de 6) c) dans 6) b), la linéarité des séries convergentes donne :

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(2 \times 4 + 5 \times 2 + 1) = \frac{19}{6}.$$

La formule de Koenig-Huygens s'applique puisque le moment d'ordre 2 est fini :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{19}{6} - \frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}.$$

7) a) La variable X admet un moment d'ordre 2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{11}{12\varepsilon^2}.$$

7) b) Si $X \geq 3$, alors $X - 3/2 \geq 3/2$, donc $|X - 3/2| \geq 3/2$. Par inclusion d'événements, puis par 7) a) avec $\varepsilon = 3/2 > 0$:

$$P(X \geq 3) \leq P\left(\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{11/12}{(3/2)^2} = \frac{11}{27}.$$

8) a) Pour $n \geq 1$ et $x \neq 1$, la somme géométrique finie de raison x est :

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

8) b) L'identité de 8) a) vaut sur tout $[0, 1/2]$, où les fonctions sont continues.

L'intégration et la linéarité d'une somme finie donnent :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{1/2} x^{k-1} dx = \int_0^{1/2} \frac{1 - x^n}{1 - x} dx.$$

À gauche, $\int_0^{1/2} x^{k-1} dx = 2^{-k}/k$. À droite, on sépare deux intégrales de fonctions continues, et :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 - x} dx = [-\ln(1 - x)]_0^{1/2} = \ln 2.$$

On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n 2^{-k}/k = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x} dx.$$

Aucun échange d'une somme infinie avec une intégrale n'est utilisé.

8) c) Pour $0 \leq x \leq 1/2$, on a $0 \leq 1/(1 - x) \leq 2$. Par positivité et comparaison sur le segment :

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x} dx \leq 2 \int_0^{1/2} x^n dx = \frac{2^{-n}}{n + 1} \leq 2^{-n}.$$

Comme $2^{-n} \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x} dx = 0.$$

- 8) d) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'identité de 8) b), le reste intégral tend vers 0 par 8) c). La série converge aussi par 2), et l'on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{k} = \ln 2.$$

Cette somme est $P(X = 1)$ d'après 4) b). Pour $P(X = 2)$, on retire le terme correspondant à $k = 1$ de la même série :

$$P(X = 1) = \ln 2, \quad P(X = 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- 8) e) La variable X ne prend que des valeurs entières strictement positives. Les événements $[X = 1]$, $[X = 2]$ et $[X \geq 3]$ forment donc un système complet. Ainsi :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

En utilisant l'approximation demandée $\ln 2 \simeq 0,7$, on obtient

$P(X \geq 3) \simeq 1,5 - 1,4 = 0,1$. Le majorant de la question 7) vaut $11/27 \simeq 0,407$: il est valide mais assez éloigné de la probabilité effective. L'inégalité générale de Bienaymé-Tchebychev n'exploite ici que la moyenne et la variance, tandis que le calcul exact utilise la loi de X .

Relevé des adaptations

- Exercice 2, rappel précédant 1), utilisé en 4) b) et 4) c) : extension admise de la formule de covariance et de sa conséquence en cas d'indépendance au seul couple (X^2, Y^2) , sous l'hypothèse des moments d'ordre 4 de X, Y , effectivement établis. Cela conserve le raisonnement demandé sans exiger une étude des densités des carrés, qui sortiraient du cadre limitatif des densités du programme.
- Problème, préambule et 3) : indépendance des lancers successifs explicitée, nécessaire à la loi géométrique et au comportement de la simulation.

- Problème, 1) a) et 1) b) : Code adapté en Python. La boucle avec arrêt après un premier succès est remplacée par une boucle `while` initialisée pour effectuer au moins un lancer. Documentation de `rd.randint` ajoutée, blancs du sujet conservés et borne supérieure exclusive prise en compte pour le tirage dans l'urne.