



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

- 1) a) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(u)$.
- 1) b) La matrice A est-elle inversible ?
- 2) a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
- 2) b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.
- 2) c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- 3) a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- 3) b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1} , puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a $A^k = 0$.
- 4) On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).

- 4) a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$.

On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 4) b) Établir que $M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$.

Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant la fonction f pour densité.

- 2) Déterminer la fonction de répartition F de X .

- 3) Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\frac{1}{2}$.

- 4) a) Déterminer $E((X-1)^2)$.

- 4) b) En déduire que X a une variance et que $V(X) = \frac{3}{4} - \ln 2$.

- 5) On appelle variable indicatrice d'un événement A , la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

On considère maintenant la variable aléatoire Y , indicatrice de l'événement $[X \leq \frac{1}{2}]$, et la variable aléatoire Z , indicatrice de l'événement $[X > \frac{1}{2}]$.

- 5) a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z , noté $\rho(Y, Z)$, est égal à -1 .
- 5) b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z .

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de l'ouvert $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

- 1) a) Calculer les dérivées partielles premières de f .
- 1) b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
- 2) a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .
- 2) b) Former la matrice hessienne de f en A et déterminer les signes de ses valeurs propres. Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
- 3) a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.
- 3) b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
- 4) On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de l'ouvert $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

4) a) Utiliser la question 3) pour établir que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geq -\frac{1}{6}.$$

4) b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P(X \geq m) > 0.$$

On suppose également que X vérifie :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_{[X \geq m]}(X \geq n + m) = P(X \geq n).$$

On pose $P(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1) On pose $q = 1 - p$. Montrer que $P(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.

2) Montrer que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

3) a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.

3) b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X \geq n)$ en fonction de n et de q .

3) c) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1).$$

3) d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X = n) = q^n p$.

4) a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.

4) b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geq n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n , noté λ_n , par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = P_{[Y \geq n]}(Y = n).$$

1) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

1) b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}.$$

1) c) Établir alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda_n < 1.$$

1) d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).$$

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n).$$

2) b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0$.

2) c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty.$$

2) d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n .

3) a) Une fonction récursive est une fonction qui s'appelle elle-même. Dans le code suivant, l'appel porte sur $n - 1$ lorsque $n > 0$; les appels successifs atteignent donc le cas $n = 0$, qui ne provoque plus d'appel. Aucune connaissance générale sur la récursivité n'est supposée.

Compléter la déclaration de fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $n!$ lorsqu'on appelle $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Python

```
def f(n):
    if n == 0:
        return ...
    else:
        return ...
```

3) b) On considère la déclaration de fonction Python suivante, pour a réel et $n \in \mathbb{N}$:

Python

```
def g(a, n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * g(a, n - 1)
```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de $g(a, n)$.

- 3) c) Proposer un programme Python utilisant ces deux fonctions et permettant, d'une part, le calcul de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

et, d'autre part, à l'aide du résultat de la question 1) a), le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, lorsque n et a sont entrés au clavier par l'utilisateur. On supposera $n \geq 1$.

La fonction Python «input(message)» affiche le message et lit une chaîne saisie au clavier; «int(texte)» et «float(texte)» la convertissent respectivement en entier et en réel. Après l'importation «import numpy as np», «np.exp(t)» renvoie e^t . La commande «print(valeur)» affiche la valeur.

- 3) d) Compléter la déclaration de fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

à l'appel de $\text{sigma}(a, n)$, pour $a > 0$ et $n \geq 1$.

Python

```
import numpy as np

def sigma(a, n):
    p = 1
    s = 1
    for k in range(1, n):
        p = p * a / k
        s = ...
    s = ...
    return s
```

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X

1) Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3) d) de la partie 1.

2) On considère une variable aléatoire Z , à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z \geq n) > 0.$$

On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \lambda.$$

2) a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

2) b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geq n)$ en fonction de λ et de n .

2) c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X .