



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) a) On résout le système ${}^t(A(x, y, z)) = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0, \\ -2x - 8y - 6z = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $x = -4y - 3z$. En reportant dans la première, on obtient $2y + z = 0$, donc $z = -2y$ et $x = 2y$. La troisième équation est alors satisfaite. Les solutions sont exactement les vecteurs $y(2, 1, -2)$, où $y \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{Ker } f = \text{Vect}(u)$. Comme $u \neq 0$, ce noyau est de dimension 1.

1) b) Le noyau de f contient le vecteur non nul u . L'application f n'est donc pas injective. Une matrice carrée est inversible si et seulement si l'application linéaire qu'elle représente est bijective, ou, de manière équivalente en dimension finie, si son noyau est nul. Par conséquent A n'est pas inversible.

2) a) Écrivons $v = (x, 1, z)$. Les deux premières coordonnées de $f(v) = u$ donnent :

$$\begin{cases} 2x + 7z = -8, \\ x + 3z = -3. \end{cases}$$

En retranchant deux fois la deuxième équation à la première, on obtient $z = -2$, puis $x = 3$. Pour ce candidat, la troisième coordonnée de $f(v)$ vaut $-2 \cdot 3 - 8 + 12 = -2$, comme celle de u .

Il existe donc un unique vecteur satisfaisant les conditions, et $v = (3, 1, -2)$.

2) b) Pour un vecteur $(x, 1, z)$, les deux premières coordonnées de $f(x, 1, z) = v$ imposent :

$$\begin{cases} 2x + 7z = -7, \\ x + 3z = -3. \end{cases}$$

La soustraction donne $z = -1$, puis $x = 0$. La troisième coordonnée de l'image est alors $-8 + 6 = -2$. Ainsi le vecteur $w = (0, 1, -1)$ vérifie bien $f(w) = (3, 1, -2) = v$, et les équations précédentes établissent son unicité avec la deuxième coordonnée imposée.

2) c) Méthode 1 — Exploiter les images successives.

Nous savons que $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$. Supposons $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. En appliquant f^2 , on obtient $\gamma u = 0$, d'où $\gamma = 0$. En appliquant ensuite f à $\alpha u + \beta v = 0$, on obtient $\beta u = 0$, donc $\beta = 0$. Enfin $\alpha u = 0$ entraîne $\alpha = 0$.

La famille (u, v, w) est libre. Elle contient trois vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc c'est une base.

Méthode 2 — Résoudre directement la relation linéaire.

La relation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

La somme de la troisième équation et de deux fois la deuxième donne $\gamma = 0$. La deuxième impose alors $\alpha = -\beta$ et la première donne $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. La famille est donc libre et constitue une base.

La première méthode réutilise la structure de l'endomorphisme ; la seconde s'applique même lorsque les images des vecteurs ne sont pas déjà connues. Dans la suite, la matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3) a) Les colonnes de la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ sont les coordonnées de $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ dans cette base. Ainsi :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : sa seule valeur propre est 0. On peut aussi le vérifier directement : si

${}^t(N(a, b, c)) = \lambda {}^t(a, b, c)$ avec $\lambda \neq 0$, la dernière équation donne $c = 0$, puis la deuxième $b = 0$ et la première $a = 0$, ce qui exclut un vecteur propre. La valeur 0 est effectivement propre, puisque $u \neq 0$ appartient au noyau de f .

Si f était diagonalisable, il aurait une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient nuls. Il serait alors l'endomorphisme nul, alors que $f(v) = u \neq 0$. Il n'est donc pas diagonalisable.

- 3) b) La formule de changement de base donne $N = P^{-1}AP$, soit $A = PNP^{-1}$, l'inversibilité de P étant assurée par la question 2) c).

Par simplifications successives de $P^{-1}P = I$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PN^kP^{-1}$. Or :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Pour $k \geq 3$, on a $N^k = 0$, donc $A^k = 0$.

- 4) a) La matrice nulle commute avec N . Si $M_1 N = N M_1$, $M_2 N = N M_2$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne :

$$(\alpha M_1 + \beta M_2)N = \alpha N M_1 + \beta N M_2 = N(\alpha M_1 + \beta M_2).$$

L'ensemble C_N est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour déterminer ses éléments, écrivons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Les produits sont :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}, \quad NM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $MN = NM$ équivaut à $d = g = h = 0$, $e = i = a$ et $f = b$. Les coefficients a, b, c restent libres. Ainsi :

$$M \in C_N \iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN + cN^2.$$

On a donc $C_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$.

- 4) b) En multipliant l'égalité $MA = AM$ à gauche par P^{-1} et à droite par P , puis en remplaçant A par PNP^{-1} , on obtient :

$$MA = AM \iff (P^{-1}MP)N = N(P^{-1}MP).$$

Toutes ces transformations sont réversibles, puisque P est inversible. Elles établissent bien :

$$M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_N.$$

D'après 4) a), cette dernière condition équivaut à l'existence de réels a, b, c tels que $P^{-1}MP = aI + bN + cN^2$. En conjuguant par P , cela équivaut à :

$$M = aI + bA + cA^2.$$

Ainsi $C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$. Pour vérifier l'indépendance de ces trois matrices, supposons $aI + bA + cA^2 = 0$ et appliquons cette égalité au vecteur w . Elle donne $aw + bv + cu = 0$. La famille (u, v, w) étant libre, $a = b = c = 0$. La famille (I, A, A^2) est donc une base de C_A et $\dim C_A = 3$.

Exercice 2

- 1) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur les intervalles de sa définition, à l'exception éventuelle des points de raccord 0, $1/2$ et 1, où ses limites à gauche et à droite sont finies. En particulier les dénominateurs de chaque expression ne s'annulent pas sur l'intervalle concerné.

Les deux intégrales non nulles de normalisation se calculent sur des segments avec des fonctions continues :

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{2(1-x)^2} = \left[\frac{1}{2(1-x)} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{2x^2} = \left[-\frac{1}{2x} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2}.$$

Les valeurs en un nombre fini de points ne changent pas les intégrales. Puisque f est nulle en dehors de $[0, 1]$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ est 1. Elle peut donc être considérée comme une densité de probabilité.

- 2) Par définition, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. On a $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $F(x) = 1$ pour $x \geq 1$.

Pour $0 < x < 1/2$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2(1-t)^2} = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2(1-x)}.$$

Au point $1/2$, cette expression vaut $1/2$. Pour $1/2 \leq x < 1$:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{1/2}^x \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}.$$

Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{2(1-x)} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2x} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les expressions se raccordent en 0 , $1/2$ et 1 , conformément à la continuité de la fonction de répartition d'une variable à densité.

- 3) Comme $P(0 \leq X \leq 1) = 1$, l'intégrale de $|x|f(x)$ est majorée par celle de f , donc est finie. La variable X possède une espérance.

Méthode 1 — Calculer les deux intégrales.

La décomposition $\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$ donne :

$$\int_0^{1/2} \frac{x dx}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} + \ln(1-x) \right]_0^{1/2} = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

Sur l'autre moitié du support :

$$\int_{1/2}^1 \frac{x dx}{2x^2} = \frac{1}{2} [\ln x]_{1/2}^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

En additionnant, on obtient $E(X) = 1/2$.

Méthode 2 — Utiliser la symétrie.

Pour $0 < x < 1$, on a $f(1-x) = f(x)$. Le changement de variable affine $t = 1-x$ dans l'intégrale sur $[0, 1]$ donne :

$$E(X) = \int_0^1 (1-t)f(1-t) dt = \int_0^1 (1-t)f(t) dt = 1 - E(X).$$

La dernière égalité utilise la normalisation et la linéarité d'intégrales convergentes. Ainsi $2E(X) = 1$, donc $E(X) = 1/2$. La méthode directe donne un calcul réutilisable pour d'autres moments ; la symétrie évite ici ces primitives.

- 4) a) La fonction $(x-1)^2$ est bornée par 1 sur $[0, 1]$, donc le théorème de transfert s'applique avec une intégrale absolument convergente. On découpe cette intégrale au point $1/2$:

$$E((X-1)^2) = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

La première intégrale vaut $1/4$. Pour la seconde :

$$\frac{1}{2} \left[x - 2 \ln x - \frac{1}{x} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

Par conséquent $E((X-1)^2) = 1 - \ln 2$.

- 4) b) La variable X possède un moment d'ordre 2, puisque $x^2 \leq 1$ sur son support à un événement de probabilité nulle près. Elle admet donc une variance. On peut utiliser

$V(X) = V(X - 1)$ et la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E((X - 1)^2) - (E(X) - 1)^2 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

- 5) a) Les événements $[X \leq 1/2]$ et $[X > 1/2]$ sont complémentaires. Leurs indicatrices vérifient donc exactement $Y + Z = 1$, soit $Z = 1 - Y$.

De plus $P(Y = 1) = F(1/2) = 1/2$, et $P(Y = 0) = 1/2$. Les deux variables ne sont donc pas constantes et leurs variances sont strictement positives. Elles sont liées par une relation affine de pente strictement négative. Le cas d'égalité du résultat sur la corrélation linéaire donne alors, sans calcul de covariance, $\rho(Y, Z) = -1$.

- 5) b) Les deux variables suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, donc $V(Y) = V(Z) = 1/4$. La définition de la corrélation donne :

$$\text{Cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z) \sqrt{V(Y)V(Z)} = -\frac{1}{4}.$$

On peut aussi le vérifier directement : les deux événements sont incompatibles, donc $YZ = 0$, et la formule de Koenig-Huygens donne $\text{Cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = 0 - 1/4 = -1/4$.

Exercice 3

La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les critères différentiels du programme y sont applicables.

- 1) a) En dérivant par rapport à une variable en tenant l'autre constante, on obtient :

$$\partial_1 f(x, y) = 4x + 2y - 1, \quad \partial_2 f(x, y) = 2x + 4y - 1.$$

- 1) b) Un point est critique si et seulement si ses deux dérivées partielles premières sont nulles. Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 1. \end{cases}$$

La différence des équations donne $2x - 2y = 0$, donc $x = y$. En reportant dans la première, $6x = 1$. L'unique point critique est donc $A = (1/6, 1/6)$.

2) a) Les dérivées partielles secondes sont constantes :

$$\partial_{1,1}^2 f = 4, \quad \partial_{2,2}^2 f = 4, \quad \partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f = 2.$$

2) b) Question adaptée au programme actuel : la hessienne et les signes de ses valeurs propres remplacent tout ancien critère d'extremum.

La matrice hessienne en A est $H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont

indépendants, et le calcul direct donne :

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$; les valeurs propres de H sont donc exactement 6 et 2, toutes deux strictement positives. Puisque f est de classe C^2 sur un ouvert contenant le point critique A , le critère de la hessienne assure un minimum local strict en A .

Sa valeur est :

$$m = f(1/6, 1/6) = \frac{2 + 2 + 2}{36} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}.$$

3) a) Développons séparément :

$$2 \left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 = 2x^2 + 2xy - x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{3}{2} \left(y - \frac{1}{6} \right)^2 = \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{24}.$$

La somme vaut donc :

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} = f(x, y) + \frac{1}{6}.$$

3) b) L'identité précédente s'écrit :

$$f(x, y) = -\frac{1}{6} + 2 \left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(y - \frac{1}{6} \right)^2.$$

Les deux carrés sont positifs ou nuls, donc $f(x, y) \geq -1/6$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'égalité est possible exactement lorsque $y = 1/6$ et $x + y/2 = 1/4$, soit $x = y = 1/6$.

Ainsi $m = -1/6$ est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$, et il est atteint uniquement en A .

4) a) Pour tous x, y réels, $g(x, y) = f(e^x, e^y)$. La question 3) b) s'applique à tout couple réel, donc en particulier au couple (e^x, e^y) . Elle entraîne $g(x, y) \geq -1/6$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) b) Méthode 1 — Transporter le cas d'égalité.

D'après 3) b), l'égalité $f(e^x, e^y) = -1/6$ a lieu exactement lorsque $e^x = e^y = 1/6$.

Comme l'exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, cela équivaut à $x = y = -\ln 6$.

Le minorant de 4) a) est donc effectivement atteint, et g possède un minimum global égal à $-1/6$, atteint uniquement en $(-\ln 6, -\ln 6)$.

Méthode 2 — Identifier le point par le calcul différentiel.

La fonction g est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Son gradient est :

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(4e^x + 2e^y - 1) \\ e^y(2e^x + 4e^y - 1) \end{pmatrix}.$$

Comme les exponentielles sont strictement positives, l'annulation du gradient équivaut à $4e^x + 2e^y = 1$ et $2e^x + 4e^y = 1$. La même résolution que dans 1) b) donne $e^x = e^y = 1/6$, donc l'unique point critique $B = (-\ln 6, -\ln 6)$.

Les dérivées secondes donnent en ce point :

$$\nabla^2 g(B) = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres, de mêmes vecteurs propres que H , sont $1/6$ et $1/18$, toutes deux strictement positives. Le point B est donc un minimum local strict. Sa valeur est $g(B) = f(1/6, 1/6) = -1/6$; le minorant global déjà prouvé en 4) a) montre qu'il s'agit aussi du minimum global.

La substitution exploite directement les carrés obtenus en 3); le calcul différentiel permet de retrouver le candidat et de vérifier sa nature locale sans calcul de déterminant.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire

1) Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, les événements $[X = 0]$ et $[X \geq 1]$ sont complémentaires. Ainsi $P(X \geq 1) = 1 - p = q$. L'hypothèse $P(X \geq 1) > 0$ donne $q > 0$, et $p > 0$ donne $q < 1$. En particulier $0 < p < 1$.

2) L'événement $[X \geq n + m]$ est inclus dans $[X \geq m]$, dont la probabilité est strictement positive par hypothèse. La définition de la probabilité conditionnelle donne :

$$P_{[X \geq m]}(X \geq n + m) = \frac{P(X \geq n + m)}{P(X \geq m)}.$$

En utilisant la propriété sans mémoire de l'énoncé et en multipliant par le dénominateur non nul, on obtient :

$$P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

3) a) En prenant $m = 1$ dans 2), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = P(X \geq 1)P(X \geq n) = q u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison q .

3) b) Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $u_0 = P(X \geq 0) = 1$. L'expression de la suite géométrique donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X \geq n) = u_n = q^n.$$

3) c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[X \geq n]$ est la réunion disjointe de $[X = n]$ et de $[X \geq n + 1]$. L'additivité donne $P(X \geq n) = P(X = n) + P(X \geq n + 1)$, d'où l'égalité demandée.

3) d) En reportant 3) b) dans 3) c), on obtient :

$$P(X = n) = q^n - q^{n+1} = q^n(1 - q) = q^n p.$$

Ces probabilités sont strictement positives, et leur somme vaut $p/(1 - q) = 1$, puisque $0 < q < 1$ et $1 - q = p$. Elles définissent donc bien une loi sur $\mathbb{N}$.

4) a) La variable $X + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geq 1$:

$$P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Il s'agit de la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

4) b) Une variable de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ possède une espérance $1/p$ et une variance $(1 - p)/p^2 = q/p^2$. Ces moments sont donc finis. Comme $X = (X + 1) - 1$, les propriétés de l'espérance et de la variance donnent :

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète

1) a) Le dénominateur $P(Y \geq n)$ est strictement positif par hypothèse. L'événement $[Y = n]$ est inclus dans $[Y \geq n]$. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\lambda_n = P_{[Y \geq n]}(Y = n) = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

1) b) La réunion disjointe $[Y \geq n] = [Y = n] \cup [Y \geq n + 1]$ donne :

$$1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n) - P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}.$$

1) c) La définition comme probabilité donne $\lambda_n \geq 0$. D'après 1) b), le nombre $1 - \lambda_n$ est strictement positif, puisque le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. Donc $\lambda_n < 1$ et, finalement, $0 \leq \lambda_n < 1$.

1) d) Pour $n = 1$, on a $P(Y \geq 0) = 1$ et la relation 1) b) avec $n = 0$ donne $P(Y \geq 1) = 1 - \lambda_0$. L'identité est donc vraie au premier rang.

Supposons, pour un entier $n \geq 1$, que

$$P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).$$

La relation 1) b) donne alors :

$$P(Y \geq n+1) = (1 - \lambda_n)P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^n (1 - \lambda_k).$$

La propriété est ainsi établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

- 2) a) Les événements $[Y = k]$, pour $0 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $[Y < n]$, puisque Y est à valeurs entières positives ou nulles. Leur somme de probabilités vaut donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = P(Y < n) = 1 - P(Y \geq n).$$

- 2) b) Puisque Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, les événements $[Y = k]$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1.$$

Les sommes partielles de 2) a) tendent donc vers 1, ce qui donne $P(Y \geq n) \rightarrow 0$.

- 2) c) Tous les facteurs $1 - \lambda_k$ sont strictement positifs. On peut donc prendre le logarithme du produit fini de 1) d) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = -\ln P(Y \geq n).$$

Le nombre $P(Y \geq n)$ est strictement positif et tend vers 0. Comme $-\ln t \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, le membre de droite tend vers $+\infty$. C'est la limite demandée.

- 2) d) Les termes λ_n sont positifs ou nuls. Supposons par l'absurde que leur série converge. Alors $\lambda_n \rightarrow 0$, et il existe un rang n_0 tel que $0 \leq \lambda_n \leq 1/2$ pour tout $n \geq n_0$.

Pour $t \in [0, 1/2]$, la fonction $h(t) = -\ln(1 - t)$ vérifie $h(0) = 0$ et $0 < h'(t) = 1/(1 - t) \leq 2$. L'inégalité des accroissements finis donne donc :

$$0 \leq -\ln(1 - t) \leq 2t.$$

En prenant $t = \lambda_n$, on voit que la convergence supposée de

$$\sum \lambda_n$$

entraînerait, par comparaison de séries positives, celle de

$$\sum -\ln(1 - \lambda_n).$$

Cela contredit 2) c). La série

$$\sum \lambda_n$$

diverge donc ; ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Cette preuve inclut les cas où certaines valeurs de λ_n sont nulles : aucune division par λ_n n'est nécessaire.

- 3) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python ; le fonctionnement récursif est expliqué dans le sujet.

Python

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * f(n - 1)
```

Pour $n = 0$, la sortie est $1 = 0!$. Si la fonction renvoie $(n - 1)!$ à l'argument $n - 1$, alors, à l'argument $n \geq 1$, elle renvoie $n(n - 1)! = n!$. Une récurrence établit donc la valeur retournée pour tout entier naturel, dans l'interprétation mathématique de l'algorithme. Chaque appel diminue l'entier naturel jusqu'au cas d'arrêt.

Le bloc a été exécuté pour les entiers de 0 à 20 et ses sorties ont été comparées aux produits correspondants. Comme toute implémentation récursive en Python, son utilisation effective est limitée par le nombre d'appels imbriqués que l'interpréteur accepte; cette limite pratique ne change pas l'identité mathématique démontrée.

3) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
def g(a, n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * g(a, n - 1)
```

Au rang 0, la fonction renvoie 1. Si elle renvoie a^{n-1} au rang $n - 1$, elle renvoie $a a^{n-1} = a^n$ au rang $n \geq 1$. Ainsi le résultat est a^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, la sortie 1 est conservée même si $a = 0$: c'est ici la convention du produit vide.

Ce bloc a été exécuté pour plusieurs réels positifs, négatifs ou nuls et pour les entiers de 0 à 15. Le contrôle a inclus $a = 0$ et $n = 0$.

3) c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Soit W de loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque probabilité $P(W = k) = e^{-a} a^k / k!$ est strictement positive. En particulier $P(W \geq n) \geq P(W = n) > 0$. La formule de 1) a) s'applique et donne :

$$\lambda_n = \frac{e^{-a} a^n / n!}{1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-a} a^k / k!}.$$

Voici le programme complet, avec les deux fonctions utilisées :

Python

```
import numpy as np

def f(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * f(n - 1)

def g(a, n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return a * g(a, n - 1)

n = int(input("n, entier supérieur ou égal à 1 : "))
a = float(input("a, réel strictement positif : "))
if n >= 1 and a > 0:
    s = 0.0
    for k in range(n):
        s = s + g(a, k) / f(k)
    s = np.exp(-a) * s
    print(s)
    survie = 1.0 - s
    if survie > 0:
        taux = np.exp(-a) * g(a, n) / f(n) / survie
        print(taux)
    else:
        print("Précision numérique insuffisante pour calculer ce quotient.")
else:
    print("Les paramètres ne satisfont pas les conditions demandées.")
```

La boucle parcourt exactement $k = 0, \dots, n - 1$ et accumule $a^k/k!$. La multiplication finale par e^{-a} donne $P(W < n)$, qui est affichée. Le dénominateur du taux est ensuite la probabilité complémentaire $P(W \geq n)$, et le numérateur est $P(W = n)$.

Mathématiquement ce dénominateur est strictement positif. Le test supplémentaire empêche néanmoins une division par zéro si les arrondis numériques font apparaître une somme égale ou supérieure à 1. Ce message signale alors une limite du calcul approché, sans attribuer une valeur erronée au quotient.

Le programme a été exécuté avec des saisies contrôlées, notamment $(n, a) = (1, 1), (3, 2)$ et $(5, 4)$. La somme et le taux ont été comparés aux calculs directs. Les deux branches de validation des paramètres ont aussi été contrôlées. Ce calcul numérique ne remplace pas la formule exacte démontrée ci-dessus.

3) d) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

def sigma(a, n):
    p = 1
    s = 1
    for k in range(1, n):
        p = p * a / k
        s = s + p
    s = s * np.exp(-a)
    return s
```

Avant la boucle, $p = 1 = a^0/0!$ et $s = 1$. Supposons qu'avant l'itération $k \geq 1$, $p = a^{k-1}/(k-1)!$ et

$$s = \sum_{j=0}^{k-1} a^j/j!.$$

La nouvelle affectation de p donne $p = a^k/k!$, puis celle de s donne

$$s = \sum_{j=0}^k a^j/j!.$$

La boucle va jusqu'à $n - 1$ inclus ; après celle-ci,

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} a^k/k!.$$

La multiplication par e^{-a} et le retour final fournissent donc bien la somme demandée.

Lorsque $n = 1$, la boucle est vide et la sortie vaut e^{-a} , ce qui correspond à l'unique terme $k = 0$.

Le bloc a été exécuté pour plusieurs valeurs de $a > 0$ et de $n \geq 1$, y compris $n = 1$, et comparé à la somme directe. Cette version évite de recalculer les puissances et les factorielles à chaque itération.

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X

- 1) La partie 1 a donné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = pq^n$ et $P(X \geq n) = q^n$, avec $0 < q < 1$. Le dénominateur est donc strictement positif. Le taux de panne de X vaut :

$$\lambda_n = \frac{pq^n}{q^n} = p.$$

Il est constant et appartient à $]0, 1[$.

- 2) a) D'après la partie 2, question 1) c), chaque taux de panne appartient à $[0, 1[$. Ainsi $0 \leq \lambda < 1$.

Si $\lambda = 0$, le produit de la partie 2, question 1) d), donne $P(Z \geq n) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Cela contredit la partie 2, question 2) b), qui s'applique à toute variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

et impose $P(Z \geq n) \rightarrow 0$. Donc $\lambda > 0$, et finalement $0 < \lambda < 1$.

2) b) La partie 2, question 1) d), donne pour $n \geq 1$:

$$P(Z \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda) = (1 - \lambda)^n.$$

Pour $n = 0$, la probabilité vaut 1, qui est aussi $(1 - \lambda)^0$. La formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) c) Comme en partie 1, question 3) c), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n + 1) = (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda)^{n+1} = \lambda(1 - \lambda)^n.$$

Ainsi $Z + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\lambda \in]0, 1[$. C'est exactement la famille de lois obtenue pour X en partie 1, avec $p = \lambda$.

Réciproquement, pour toute loi $P(Z = n) = \lambda(1 - \lambda)^n$ avec $0 < \lambda < 1$, la somme géométrique donne $P(Z \geq n) = (1 - \lambda)^n > 0$, et son taux de panne est le quotient constant λ . Les deux sens de la caractérisation sont donc établis.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, préambules de f et de g : l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est explicitement indiqué comme ouvert, conformément aux commentaires du programme sur la nature topologique du domaine.
- Exercice 3, 2) b) : la demande de former la hessienne et d'étudier les signes de ses valeurs propres précise la méthode actuelle de recherche du minimum local ; objectif, point critique et valeur demandée conservés.

- Problème, partie 2, 3) a) et 3) b) : Code adapté en Python. Les deux fonctions récursives sont conservées avec une explication locale du mécanisme et du cas d'arrêt ; aucune maîtrise générale de la récursivité n'est supposée.
- Problème, partie 2, 3) c) : Code adapté en Python ; consigne actualisée et documentation utile de la saisie, des conversions, de l'affichage et de l'exponentielle ajoutée.
- Problème, partie 2, 3) d) : Code adapté en Python ; boucle, initialisations et blancs conservés. L'ancienne omission déclarative de la variable d'accumulation n'a pas lieu en Python, où son affectation initialise directement cette variable.