



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe

$$f(M) = M + (a + d)I, \text{ où } I \text{ désigne la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$ et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1 , J_2 , J_3 et J_4 .
- 2) b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 2) c) Justifier que f est diagonalisable.
- 3) a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 3) b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
- 3) c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
- 4) a) Déterminer la matrice P^{-1} .
- 4) b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- 4) c) En déduire explicitement la matrice A^n .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert, par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

- 1) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- 2) a) Déterminer les dérivées partielles premières de f .
- 2) b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
- 3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f .
- 3) b) Calculer la matrice hessienne de f en A et étudier les signes de ses valeurs propres. Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A . En préciser la nature et la valeur.
- 4) a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq xe^x$.
- 4) b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2) b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[. \end{cases}$$

1) a) Pour tout $x \in [0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t) dt$.

1) b) En déduire que $\int_0^1 f(t) dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur. Pour cette question, cette intégrale est interprétée comme la limite de $\int_0^x f(t) dt$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose $a \geq 1$.

1) c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition. On choisit X à valeurs dans $[0, 1[$.

2) Expliciter $F(x)$ pour tout réel x .

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X . Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1 - X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3) a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x .

3) b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a .

4) a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

4) b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a .

4) c) Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a .

4) d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E(e^{-2Y}) = \frac{a}{a+2}$. En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X .

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité p , où $0 < p < 1$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$. Les choix d'avancer ou de revenir à l'origine sont indépendants d'un instant à l'autre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine, sans compter son positionnement au départ.

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .

1) b) Donner la loi de X_1 .

1) c) En déduire $P(T = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T .

2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

2) b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que $P(X_n = 0) = 1 - p$.

3) a) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1).$$

3) b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k(1-p).$$

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

3) c) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1.$$

4) Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

Après l'importation `import numpy.random as rd`, `rd.randint(3)` renvoie au hasard et de façon équiprobable un entier de $\{0, 1, 2\}$. Les appels successifs réalisent des tirages indépendants. La commande `input()` lit une saisie sous forme de texte ; `int(input())` la convertit en entier. On suppose que l'utilisateur saisit un entier naturel n .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input())
X = 0
for k in range(1, n + 1):
    u = rd.randint(3)
    if u == 2:
        X = ...
    else:
        X = ...
print(X)
```

5) a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.$$

5) b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6) a) Montrer, en utilisant la question 3) a), que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1).$$

6) b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

6) c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .

6) d) Montrer enfin que :

$$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}).$$