



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) On vérifie que les images sont des matrices de l'espace considéré et que les combinaisons linéaires sont préservées.

Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors

$$f(M) = \begin{pmatrix} 2a + d & c \\ b & a + 2d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pour $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la somme des deux coefficients diagonaux de $\lambda M + \mu N$ est $\lambda(a + d) + \mu(a' + d')$. Par conséquent :

$$f(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N + (\lambda(a + d) + \mu(a' + d'))I = \lambda f(M) + \mu f(N).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme.

- 2) a) La somme des coefficients diagonaux vaut 1 pour J_1, J_4 et 0 pour J_2, J_3 . Comme $I = J_1 + J_4$, on obtient :

$$f(J_1) = J_1 + I = 2J_1 + J_4, \quad f(J_2) = J_2,$$

$$f(J_3) = J_3, \quad f(J_4) = J_4 + I = J_1 + 2J_4.$$

- 2) b) La colonne de rang j de la matrice de f contient les coordonnées de $f(J_j)$ dans la

base donnée. Les quatre égalités précédentes donnent donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 2) c) La matrice A est réelle et symétrique, puisque ${}^tA = A$. Le résultat du programme selon lequel toute matrice réelle symétrique est diagonalisable s'applique. L'endomorphisme représenté par A , c'est-à-dire f , est donc diagonalisable.

- 3) a) Vérifions que la famille est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(J_1 - J_4) + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta I = 0.$$

En utilisant $I = J_1 + J_4$, cette relation s'écrit :

$$(\alpha + \delta)J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + (-\alpha + \delta)J_4 = 0.$$

La famille (J_1, J_2, J_3, J_4) étant une base, on a $\alpha + \delta = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ et $-\alpha + \delta = 0$.

L'addition puis la soustraction des deux équations restantes donnent $\delta = \alpha = 0$.

La famille étudiée est donc libre. Elle contient quatre matrices dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 : c'est une base, notée $\mathcal{B}'$.

- 3) b) Par linéarité et d'après 2) a) :

$$f(J_1 - J_4) = (2J_1 + J_4) - (J_1 + 2J_4) = J_1 - J_4,$$

$$f(J_2) = J_2, \quad f(J_3) = J_3,$$

$$f(I) = f(J_1) + f(J_4) = 3J_1 + 3J_4 = 3I.$$

Les vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont donc propres, de valeurs propres respectives 1, 1, 1, 3. Ainsi :

$$D = \text{diag}(1, 1, 1, 3).$$

- 3) c) La matrice de passage P a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base initiale. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible parce qu'elle est une matrice de passage entre deux bases. La formule de changement de base donne $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$.

- 4) a) Pour inverser le changement de coordonnées, écrivons :

$$\alpha(J_1 - J_4) + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta I = (\alpha + \delta)J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + (-\alpha + \delta)J_4.$$

Si les coordonnées initiales sont (x_1, x_2, x_3, x_4) , alors $x_1 = \alpha + \delta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, $x_4 = -\alpha + \delta$. On résout :

$$\alpha = \frac{x_1 - x_4}{2}, \quad \beta = x_2, \quad \gamma = x_3, \quad \delta = \frac{x_1 + x_4}{2}.$$

Par conséquent :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les formules résolvent le système pour toute colonne de coordonnées ; elles justifient l'inverse sans utiliser de déterminant d'ordre 4.

4) b) Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_4 = A^0$.

Si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors, par associativité du produit matriciel :

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) c) Méthode 1 — Utiliser la diagonalisation obtenue.

Comme D est diagonale, $D^n = \text{diag}(1, 1, 1, 3^n)$. D'abord :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

La multiplication par P^{-1} donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} & 0 & 0 & \frac{3^n - 1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3^n - 1}{2} & 0 & 0 & \frac{3^n + 1}{2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $n = 0$, les coefficients diagonaux valent 1 et les coefficients hors diagonale sont nuls : la formule couvre bien ce cas.

Méthode 2 — Exploiter directement une relation entre matrices.

Posons

$$B = A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un produit direct donne $B^2 = 2B$. Par récurrence, $B^k = 2^{k-1}B$ pour tout entier $k \geq 1$: le passage du rang k au rang suivant s'obtient en multipliant par B .

Les matrices I_4 et B commutent. Pour $n \geq 1$, le binôme de Newton s'applique donc :

$$A^n = (I_4 + B)^n = I_4 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} B = I_4 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \right) B.$$

Le binôme scalaire donne

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1.$$

On retrouve $A^n = I_4 + \frac{3^n - 1}{2}(A - I_4)$, puis la matrice affichée dans la première méthode. Pour $n = 0$, cette dernière identité est aussi vraie directement.

La première méthode utilise la base propre construite par le sujet ; la seconde est utile lorsqu'une relation simple telle que $B^2 = 2B$ apparaît au calcul.

Exercice 2

- 1) Question adaptée au programme actuel : le caractère ouvert de $\mathbb{R}^2$ est indiqué dans le sujet.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto x(y^2 + 1)$ sont polynomiales, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. L'exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par composition puis produit, $f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

- 2) a) Pour la dérivée en x , on applique la règle du produit, puis celle de la composée. Pour la dérivée en y , le facteur x est constant. On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x(y^2+1)} + x(y^2 + 1)e^{x(y^2+1)} = (1 + x(y^2 + 1))e^{x(y^2+1)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot 2xy e^{x(y^2+1)} = 2x^2y e^{x(y^2+1)}.$$

- 2) b) Comme f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, un extremum local éventuel doit être un point critique, donc annuler les deux dérivées précédentes.

L'exponentielle est strictement positive. La seconde équation équivaut à $x^2y = 0$, donc à $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, la première dérivée vaut 1, et ne s'annule pas. Il faut donc $y = 0$; la première équation devient alors $1 + x = 0$, soit $x = -1$.

Réciproquement, les deux dérivées s'annulent en $(-1, 0)$. Le seul point critique, et donc le seul candidat à un extremum local, est bien $A = (-1, 0)$.

- 3) a) En dérivant les expressions de 2) a), on trouve les formules suivantes, valables sur tout $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (y^2 + 1)(2 + x(y^2 + 1))e^{x(y^2+1)},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2xy(2 + x(y^2 + 1))e^{x(y^2+1)},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^2(1 + 2xy^2)e^{x(y^2+1)}.$$

Pour détailler la dérivée mixte, on dérive en y le produit $(1 + x(y^2 + 1))e^{x(y^2+1)}$. Cela donne $2xy e^{x(y^2+1)} + (1 + x(y^2 + 1))2xy e^{x(y^2+1)}$, soit la deuxième formule. Comme f est de classe C^2 , le théorème de Schwarz donne l'égalité des deux dérivées mixtes.

- 3) b) Question adaptée au programme actuel : on utilise la hessienne et les signes de ses valeurs propres.

En remplaçant x par -1 et y par 0 dans 3) a), on obtient :

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont e^{-1} et $2e^{-1}$, toutes deux strictement positives. Les hypothèses du critère sont vérifiées : f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, et A est un point critique.

Ainsi f admet en A un minimum local strict. Sa valeur est $f(-1, 0) = -e^{-1}$.

- 4) a) On distingue les signes de x , car la multiplication d'une inégalité par $x < 0$ en change le sens.

Si $x \geq 0$, alors $xy^2 \geq 0$, donc $x(y^2 + 1) \geq x$. La croissance de l'exponentielle donne $e^{x(y^2+1)} \geq e^x$, puis $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

Si $x < 0$, alors $xy^2 \leq 0$, donc $x(y^2 + 1) \leq x$. On obtient $e^{x(y^2+1)} \leq e^x$; la multiplication par $x < 0$ donne encore $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

L'inégalité demandée est donc vraie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 4) b) La fonction $g : x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = (1 + x)e^x$. Comme $e^x > 0$, sa dérivée est négative pour $x < -1$, nulle en -1 et positive pour $x > -1$.

Ainsi g décroît strictement jusqu'à -1 , puis croît strictement; elle possède un minimum global unique en -1 , de valeur $-e^{-1}$.

La question précédente entraîne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq g(x) \geq -e^{-1} = f(-1, 0).$$

Le minimum local trouvé est donc un minimum global. Il est atteint uniquement en $(-1, 0)$: l'égalité $g(x) = -e^{-1}$ impose $x = -1$, et l'égalité $f(-1, y) = g(-1)$ impose $e^{-1-y^2} = e^{-1}$, donc $y = 0$.

Exercice 3

- 1) a) Pour $x \in [0, 1[$, la fonction intégrée est continue sur le segment $[0, x]$. La dérivée de $t \mapsto -(1-t)^a$ y est $a(1-t)^{a-1}$, puisque $a > 0$ et $1-t > 0$.

Par conséquent :

$$\int_0^x f(t) dt = [-(1-t)^a]_0^x = 1 - (1-x)^a.$$

- 1) b) Question adaptée au programme actuel : la limite définissant cette intégrale à la borne 1 est explicitée dans le sujet.

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a $1-x \rightarrow 0^+$; comme $a > 0$, $(1-x)^a \rightarrow 0$. D'après 1) a) :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

Cette limite est finie : l'intégrale converge et vaut $\int_0^1 f(t) dt = 1$. Le raisonnement s'appuie sur une primitive explicite et sur sa limite, sans critère général de singularité à une borne finie.

- 1) c) Question adaptée au programme actuel : on suppose désormais $a \geq 1$.

La fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. À 0, ses limites à gauche et à droite valent respectivement 0 et a , toutes deux finies. À 1, sa limite à droite est 0 ; sa limite à gauche vaut 1 si $a = 1$ et 0 si $a > 1$. Elle possède donc des limites finies à gauche et à droite en tout réel, conformément au cadre du programme.

Enfin, elle est nulle en dehors de $[0, 1[$, et 1) b) donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Ces propriétés établissent que f est une densité de probabilité.

La restriction est nécessaire à ce cadre : pour $0 < a < 1$, la limite de $a(1-t)^{a-1}$ lorsque $t \rightarrow 1^-$ serait infinie. Les calculs 1) a) et 1) b) ont néanmoins été conservés pour tout $a > 0$.

Le choix d'une variable X à valeurs dans $[0, 1[$, précisé dans le sujet, conserve la loi définie par cette densité et permet de définir $\ln(1-X)$ pour toutes ses valeurs.

2) La fonction de répartition est $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Pour $x < 0$, cette intégrale est nulle. Pour $0 \leq x < 1$, elle vaut $1 - (1-x)^a$ d'après 1) a). Pour $x \geq 1$, elle vaut 1 par normalisation. Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-x)^a & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les valeurs de raccord sont $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$; les expressions se raccordent continûment.

3) a) Puisque $0 \leq X < 1$, on a $Y = -\ln(1-X) \geq 0$. Pour $x \geq 0$, les inégalités suivantes sont équivalentes, par croissance de l'exponentielle :

$$Y \leq x \iff \ln(1-X) \geq -x \iff 1-X \geq e^{-x} \iff X \leq 1 - e^{-x}.$$

Or $1 - e^{-x} \in [0, 1[$. Par conséquent :

$$G(x) = F(1 - e^{-x}) = 1 - (e^{-x})^a = 1 - e^{-ax}.$$

Cette formule inclut $x = 0$.

- 3) b) Pour $x < 0$, la positivité de Y donne $G(x) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a $G(x) = 1 - e^{-ax}$. C'est exactement la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$. On peut choisir pour densité $g(y) = ae^{-ay}$ si $y \geq 0$, et 0 sinon.

- 4) a) Pour $b > 0$, l'intégrande est continue sur $[0, b]$ et :

$$\int_0^b e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^b = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda}.$$

Comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda b} \rightarrow 0$ lorsque $b \rightarrow +\infty$. L'intégrale converge donc et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

- 4) b) La fonction $y \mapsto e^{-y}$ est continue. Par transfert depuis la variable à densité Y , l'intégrale à examiner est :

$$\int_0^{+\infty} |e^{-y}| a e^{-ay} dy = a \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)y} dy = \frac{a}{a+1} < +\infty.$$

On a utilisé 4) a) avec $\lambda = a + 1 > 0$. L'espérance existe, et le transfert donne :

$$E(e^{-Y}) = \frac{a}{a+1}.$$

- 4) c) Méthode 1 — Utiliser la transformation exponentielle.

La définition de Y donne $e^{-Y} = 1 - X$, donc $X = 1 - e^{-Y}$. La variable e^{-Y} admet une espérance par 4) b). La linéarité de l'espérance s'applique alors :

$$E(X) = 1 - E(e^{-Y}) = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

Méthode 2 — Calculer directement par transfert depuis X .

La variable X est à valeurs dans $[0, 1]$. L'intégrale de $|t|f(t)$ est majorée par celle de f , qui vaut 1 : l'espérance existe.

Sur un segment $[0, b]$ avec $b < 1$, le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$\int_0^b ta(1-t)^{a-1} dt = a \int_{1-b}^1 (1-u)u^{a-1} du = a \left[\frac{u^a}{a} - \frac{u^{a+1}}{a+1} \right]_{1-b}^1.$$

Comme $a > 0$, les termes en $(1-b)^a$ et $(1-b)^{a+1}$ tendent vers 0 lorsque $b \rightarrow 1^-$. On obtient :

$$E(X) = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

La première méthode réutilise la loi exponentielle reconnue ; la seconde montre comment retrouver le moment en intégrant la densité initiale, avec un changement de variable effectué d'abord sur segment.

4) d) Par transfert, l'intégrale absolue associée à e^{-2Y} vaut :

$$a \int_0^{+\infty} e^{-(a+2)y} dy = \frac{a}{a+2} < +\infty.$$

La fonction transformante étant continue et $a+2 > 0$, l'espérance existe et $E(e^{-2Y}) = a/(a+2)$.

La variable e^{-Y} a donc un moment d'ordre 2. La formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(e^{-Y}) = E(e^{-2Y}) - E(e^{-Y})^2 = \frac{a}{a+2} - \frac{a^2}{(a+1)^2}.$$

Au dénominateur commun, le numérateur est $a(a+1)^2 - a^2(a+2) = a$. Ainsi :

$$V(e^{-Y}) = \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}.$$

Enfin, $X = 1 - e^{-Y}$ et $V(\alpha Z + \beta) = \alpha^2 V(Z)$ donnent :

$$V(X) = \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}.$$

Problème

On écrit $q = 1 - p$ dans ce corrigé ; les hypothèses $0 < p < 1$ donnent $0 < q < 1$.

- 1) a) Avant le premier retour à l'origine, le mobile doit avancer à chacun de ses déplacements. Pour tout $k \geq 1$:

$$[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0].$$

On peut aussi écrire $[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0] \right) \cap [X_k = 0]$: tant qu'aucun retour ne s'est produit, chaque abscisse augmente de 1.

Pour $k = 1$, l'intersection avant le dernier événement est vide et vaut Ω ; la formule donne bien $[T = 1] = [X_1 = 0]$.

- 1) b) À partir de l'abscisse initiale 0, le premier déplacement mène à 1 en cas d'avancée et à 0 en cas de retour. Ainsi :

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = 0) = q = 1 - p.$$

La variable X_1 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p .

- 1) c) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des choix successifs du mobile est explicitée dans l'énoncé.

L'événement de 1) a) correspond à $k - 1$ avancées, suivies d'un retour. L'indépendance des choix donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = p^{k-1}q.$$

Le paramètre du premier retour est q , et non p : T suit la loi géométrique de paramètre $q = 1 - p$ sur $\mathbb{N}^*$.

La somme des masses vaut

$$q \sum_{j=0}^{+\infty} p^j = q/(1-p) = 1.$$

Le mobile revient donc en un temps fini avec probabilité 1 ; l'éventualité d'avancer indéfiniment n'ajoute aucune masse à cette loi.

2) a) À l'instant 0, $X_0 = 0$, donc $X_0(\Omega) = \{0\} = \llbracket 0, 0 \rrbracket$.

Supposons que les valeurs possibles à l'instant n soient exactement $0, \dots, n$, chacune de probabilité strictement positive. À l'instant suivant, le mobile revient en 0 ou augmente son abscisse de 1. Il ne peut donc prendre que les valeurs $0, \dots, n+1$.

La valeur 0 est atteinte avec une probabilité positive, car le choix de retour a une probabilité $q > 0$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n+1\}$, le mobile peut être en $j-1$ à l'instant n , puis avancer : ce parcours a une probabilité $pP(X_n = j-1) > 0$.

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $n+1$, et toutes les valeurs annoncées sont effectivement atteintes. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

2) b) Pour $n \geq 1$, les événements $[X_{n-1} = k]$, $0 \leq k \leq n-1$, forment un système complet fini. Ils ont tous une probabilité strictement positive d'après la récurrence précédente. Dans chacun de ces états, la règle du déplacement donne :

$$P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = k) = q.$$

La formule des probabilités totales s'applique :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} qP(X_{n-1} = k) = q \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = q = 1 - p.$$

3) a) Pour obtenir une abscisse $k \geq 1$ à l'instant $n+1$, le mobile doit être en $k-1$ à l'instant n et choisir d'avancer. Réciproquement, ces deux conditions suffisent.

L'événement $[X_n = k - 1]$ a une probabilité positive pour $1 \leq k \leq n + 1$, d'après 2) a).

La formule des probabilités composées donne alors :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k - 1)P(X_{n+1} = k \mid X_n = k - 1) = pP(X_n = k - 1).$$

Cette relation vaut également pour $n = 0$, puisque $X_0 = 0$.

3) b) Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n - 1$, l'application répétée de 3) a) donne :

$$P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k - 1) = \dots = p^k P(X_{n-k} = 0).$$

Comme $n - k \geq 1$, la question 2) b) donne $P(X_{n-k} = 0) = q$. Pour $k = 0$, 2) b) fournit directement la même formule. Ainsi :

$$\forall k \in \{0, \dots, n - 1\}, \quad P(X_n = k) = qp^k.$$

Au bord $k = n$, la même remontée conduit à l'instant 0, donc :

$$P(X_n = n) = p^n P(X_0 = 0) = p^n.$$

Probabilistement, l'abscisse n exige exactement n avancées successives sans aucun retour ; par indépendance, sa probabilité est p^n .

3) c) En séparant la dernière valeur et en utilisant la somme géométrique finie :

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = q \sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n = q \frac{1 - p^n}{1 - p} + p^n = 1 - p^n + p^n = 1.$$

Cette vérification vaut pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, la somme comporte seulement $P(X_0 = 0) = 1$.

4) Code adapté en Python. La documentation de la génération aléatoire et de la saisie est donnée dans le sujet.

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input())
X = 0
for k in range(1, n + 1):
    u = rd.randint(3)
    if u == 2:
        X = X + 1
    else:
        X = 0
print(X)
```

La variable X contient l'abscisse courante. La boucle `range(1, n + 1)` effectue exactement n déplacements. La condition `u == 2` a une probabilité $1/3$ et déclenche l'avancée ; les deux autres valeurs, de probabilité totale $2/3$, déclenchent le retour à 0. Les choix successifs étant indépendants, le programme simule le modèle pour $p = 1/3$.

Lorsque $n = 0$, la boucle est vide et le programme affiche 0, conformément à $X_0 = 0$.

Ce bloc a été exécuté. Les deux branches, la saisie et les sorties ont été contrôlées, ainsi que tous les parcours de tirages jusqu'au rang 6. Cette exécution confirme le comportement du programme ; les probabilités exactes sont établies par les démonstrations précédentes.

5) a) Méthode 1 — Dériver une identité de sommes finies.

Pour un réel $t \neq 1$, la somme géométrique finie donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = (1 - t^n)/(1 - t).$$

On dérive cette égalité de fonctions dérivables sur un voisinage de $p \in]0, 1[$. Il ne s'agit

pas de dériver une série infinie :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kt^{k-1} = \frac{-nt^{n-1}(1-t) + (1-t^n)}{(1-t)^2}.$$

En prenant $t = p$ et en regroupant le numérateur :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{1 - np^{n-1} + (n-1)p^n}{(1-p)^2}.$$

Méthode 2 — Soustraire deux sommes décalées.

Notons

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}.$$

Alors

$$pS = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k.$$

En comparant les coefficients de chaque puissance de p , on obtient :

$$(1-p)S = 1 + p + \dots + p^{n-2} - (n-1)p^{n-1}.$$

La somme géométrique fournit :

$$(1-p)S = \frac{1-p^{n-1}}{1-p} - (n-1)p^{n-1}.$$

Comme $1 - p > 0$, on divise puis on met au même dénominateur :

$$S = \frac{1 - p^{n-1} - (n-1)p^{n-1}(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{1 - np^{n-1} + (n-1)p^n}{(1-p)^2}.$$

La première méthode obtient rapidement une somme pondérée à partir d'une somme géométrique ; la seconde donne le même résultat uniquement par des décalages et des soustractions de sommes finies.

5) b) Méthode 1 — Utiliser la loi de X_n et la somme précédente.

La variable X_n est à support fini : son espérance existe. Pour $n \geq 2$, sa loi donne :

$$E(X_n) = q \sum_{k=1}^{n-1} kp^k + np^n = qp \frac{1 - np^{n-1} + (n-1)p^n}{q^2} + np^n.$$

Au dénominateur q , le numérateur vaut :

$$p - np^n + (n-1)p^{n+1} + np^n(1-p) = p - p^{n+1}.$$

$$\text{Ainsi } E(X_n) = p(1 - p^n)/(1 - p).$$

Pour $n = 0$, cette expression vaut $0 = E(X_0)$. Pour $n = 1$, elle vaut $p = E(X_1)$, puisque X_1 est une Bernoulli de paramètre p . La formule est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Établir une identité de sommes finies par les probabilités de dépassement.

Pour $1 \leq j \leq n$, l'événement $[X_n \geq j]$ signifie que les j derniers déplacements sont tous des avancées. Il a donc pour probabilité p^j .

En utilisant seulement des sommes finies et en échangeant leur ordre, on établit :

$$\sum_{j=1}^n P(X_n \geq j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k 1 \right) P(X_n = k) = E(X_n).$$

Par conséquent

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n p^j = p(1 - p^n)/(1 - p).$$

Pour $n = 0$, les deux sommes sont vides et valent 0.

La première méthode suit le calcul demandé par le sujet. La seconde explique l'espérance à l'aide de la longueur de la suite finale d'avancées, sans supposer une formule de cours sur les probabilités de dépassement : l'identité utilisée vient d'être démontrée dans ce cas fini.

- 6) a) Le support fini de X_{n+1} garantit l'existence de son moment d'ordre 2. En utilisant 3) a), puis en posant $j = k - 1$ dans une somme finie :

$$E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) = p \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k - 1) = p \sum_{j=0}^n (j+1)^2 P(X_n = j).$$

On développe $(j+1)^2 = j^2 + 2j + 1$. La linéarité des sommes et la somme totale des probabilités égale à 1 donnent :

$$E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1).$$

La démonstration couvre $n = 0$ et utilise exactement la relation demandée, sans espérance conditionnelle.

- 6) b) Par définition et d'après 6) a), puis 5) b) :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= pE(X_n^2) + 2pE(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{q} \\
 &= pE(X_n^2) + \frac{2p^2(1-p^n)}{q} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{q}.
 \end{aligned}$$

En remplaçant $pE(X_n^2)$ par $pu_n - (2n-1)p^{n+2}/q$, on obtient :

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{(-(2n-1) - 2 + (2n+1))p^{n+2}}{q} + \frac{2p^2}{q} + p.$$

Le coefficient de p^{n+2} est nul, et $2p^2/q + p = p(1+p)/q$. Ainsi :

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.$$

6) c) On résout cette récurrence arithmético-géométrique. Comme $X_0 = 0$, on a

$$u_0 = -p/q.$$

Le réel $L = \frac{p(1+p)}{q^2}$ vérifie $L = pL + p(1+p)/q$. Par soustraction,
 $u_{n+1} - L = p(u_n - L)$; la suite $(u_n - L)$ est donc géométrique de raison p .

Or :

$$u_0 - L = -\frac{p}{q} - \frac{p(1+p)}{q^2} = -\frac{p(q+1+p)}{q^2} = -\frac{2p}{q^2}.$$

Par conséquent :

$$u_n = L + (u_0 - L)p^n = \frac{p(1+p) - 2p^{n+1}}{q^2}.$$

On revient à la définition de u_n :

$$E(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{q} = \frac{p(1+p) - (2 + (2n-1)q)p^{n+1}}{q^2}.$$

Cette formule vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$; à $n = 0$, elle redonne $E(X_0^2) = 0$.

- 6) d) Les deux moments sont finis. La formule de Koenig-Huygens s'applique et donne :

$$V(X_n) = \frac{p(1+p) - (2 + (2n-1)q)p^{n+1} - p^2(1-p^n)^2}{q^2}.$$

On développe le carré au numérateur. Le terme constant devient $p(1+p) - p^2 = p$, et les termes proportionnels à p^{n+1} se regroupent en :

$$-(2 + (2n-1)q)p^{n+1} + 2p^{n+2} = -(2 - 2p + (2n-1)q)p^{n+1} = -(2n+1)qp^{n+1}.$$

Le dernier terme est $-p^{2n+2}$. Ainsi :

$$V(X_n) = \frac{p - (2n+1)qp^{n+1} - p^{2n+2}}{q^2} = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}).$$

Pour $n = 0$, la parenthèse vaut $1 - (1-p) - p = 0$, conformément à la variance nulle de X_0 .

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule et 3) b) : le domaine $\mathbb{R}^2$ est explicitement indiqué comme ouvert ; la méthode par hessienne et signes des valeurs propres est précisée pour l'étude de l'extremum.
- Exercice 3, 1) b) : la définition particulière de l'intégrale à la borne 1 est donnée par une limite, afin de conserver le calcul explicite pour tout $a > 0$ sans supposer un chapitre général sur les singularités aux bornes finies.
- Exercice 3, à partir de 1) c) : restriction $a \geq 1$, car les densités étudiées dans le programme doivent posséder des limites finies à gauche et à droite en tout réel.

Pour $0 < a < 1$, la formule originale présente une limite infinie en 1. Les calculs 1) a) et 1) b) restent posés pour tout $a > 0$, et toutes les questions suivantes sont conservées avec le même paramètre restreint.

- Exercice 3, préambule après 1) c) : choix de X à valeurs dans $[0, 1[$, compatible avec la loi définie, pour que $Y = -\ln(1 - X)$ soit défini pour toutes les valeurs prises par X .
- Problème, préambule et 1) c) : indépendance des choix successifs explicitée pour préciser le modèle de déplacement utilisé dans les produits de probabilités et la simulation.
- Problème, 4) : Code adapté en Python ; documentation de `rd.randint(3)`, de l'indépendance des tirages et de la saisie, avec conservation des deux blancs du sujet.