



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$, l'intégrale totale étant considérée pour $n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et on a, en particulier,

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt.$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n .

2) Calculer u_0 et u_1 .

3) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln 2$.

3) c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

4) b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4) c) Donner la limite de la suite (u_n) .

5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

5) a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n .

5) b) Montrer que : $\forall n \geq 2, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.

- 5) c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x , par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E .

Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

- 1) a) Montrer que f est un endomorphisme de E .

- 1) b) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1, e_2 .

- 1) c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- 1) d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E .

- 2) a) Donner les valeurs propres de f , puis en déduire que f est diagonalisable.

- 2) b) Déterminer les sous-espaces propres de f .

- 3) a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient

que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

3) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

4) a) Déterminer la matrice P^{-1} .

4) b) En déduire explicitement, en fonction de n , la matrice A^n .

4) c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M .

On pose $B = \frac{1}{12}A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant « pile » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et « face » également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1) a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

1) b) Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

1) c) Vérifier que

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1.$$

1) d) Après l'importation `import numpy.random as rd`, l'instruction `rd.randint(2)` renvoie au hasard, de façon équiprobable, un entier parmi 0 et 1. Les appels successifs modélisent des lancers indépendants. La commande `input` lit une saisie au clavier, `int` la convertit en entier et `print` affiche sa valeur.

Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience ci-dessus, l'entier $n \geq 2$ étant entré au clavier par l'utilisateur (« pile » sera codé par le nombre 1 et « face » par 0).

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input("n = "))
k = 0
z = 0
lancer = 0
while lancer == 0 and ...:
    k = k + 1
    lancer = rd.randint(2)
    if lancer == 1:
        z = ...
print(z)
```

On dispose de $n + 1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise, dans ces urnes de la façon suivante : si, après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches

obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

- 2) Déterminer $X(\Omega)$.
- 3) a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P(X = i \mid Z = 0)$.
- 3) b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité conditionnelle $P(X = i \mid Z = n)$.
- 3) c) Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P(X = i \mid Z = k)$.
- 4) a) Montrer que

$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k + \frac{1}{2^n}.$$

- 4) b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
- 4) c) Exprimer, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, $P(X = i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
- 5) Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que

$$\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1.$$

Problème

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, i, j) .

- 1) a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
- 1) b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n .
- 2) a) Montrer que f_n est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe.
- 2) b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^- , puis donner le tableau de variation de f_n .
- 3) a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
- 3) b) Pour appliquer ce développement à $u = -n/x$, écrire le reste sous la forme $u^2\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 0$, puis multiplier l'égalité par x . En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
- 3) c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote oblique (D_n) dont on donnera une équation. Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
- 3) d) Donner l'allure de la courbe (C_1) .

- 4) a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
- 4) b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est une solution de l'équation $x \ln(x) = n$.
- 4) c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 4) d) Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \sim \ln n$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- 5) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

- 5) b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{1/u_{n+1}}$.

- 6) On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$.

- 6) a) Montrer que : $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{1/u_{n+1}}$.

- 6) b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- 6) c) Montrer que la série de terme général I_n est divergente.