



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Le paramètre de l'intégrale totale est précisé à $n \geq 2$ dans le préambule du sujet. Pour $n = 0$, l'intégrande vaut $1/(2+t)$; pour $n = 1$, elle vaut $1/(1+2t)$. Dans ces deux cas, l'intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge. Cette précision ne modifie pas la limite recherchée lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1) Pour chaque entier $n \geq 0$, le dénominateur $1+t+t^n$ est strictement positif sur $[0, 1]$ et dépend continûment de t . Le quotient est donc continu sur ce segment. Son intégrale u_n existe et est finie.

2) On reconnaît des primitives logarithmiques, les arguments étant positifs sur le segment :

$$u_0 = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$u_1 = \left[\frac{1}{2} \ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3.$$

3) a) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$. Les dénominateurs étant positifs, l'inversion renverse cette inégalité :

$$\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^n}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient $u_{n+1} \geq u_n$. La suite est donc croissante. Elle est même strictement croissante, car la différence des intégrandes est continue, positive et strictement positive pour $0 < t < 1$.

3) b) Pour $t \in [0, 1]$, on a $1+t+t^n \geq 1+t > 0$, donc :

$$u_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

La suite est ainsi majorée par $\ln 2$.

3) c) Une suite réelle croissante et majorée converge vers une limite réelle. Les deux hypothèses ont été établies en 3) a) et 3) b). Il existe donc $\ell \leq \ln 2$ tel que $u_n \rightarrow \ell$.

- 4) a) Les fonctions considérées sont continues sur $[0, 1]$. La linéarité de l'intégrale et la mise au même dénominateur donnent :

$$\ln 2 - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt.$$

- 4) b) Sur $[0, 1]$, le numérateur est positif ou nul et chacun des facteurs du dénominateur est au moins égal à 1. Par intégration d'inégalités :

$$0 \leq \ln 2 - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

L'encadrement est valable pour tout $n \geq 0$.

- 4) c) Comme $1/(n+1) \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement appliqué à 4) b) donne

$$\ln 2 - u_n \rightarrow 0. \text{ Ainsi :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

- 5) a) Fixons $n \geq 2$. L'intégrande est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

L'intégrale de droite converge, car $n > 1$. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives assure donc la convergence de v_n .

- 5) b) Pour $R > 1$, une primitive de t^{-n} donne :

$$\int_1^R t^{-n} dt = \frac{1 - R^{1-n}}{n-1}.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} t^{-n} dt = 1/(n-1)$. L'inégalité de 5) a), intégrée d'abord sur $[1, R]$ puis passée à la limite, fournit :

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

- 5) c) Le majorant précédent tend vers 0, donc $v_n \rightarrow 0$. Pour $n \geq 2$, la relation de Chasles s'applique à l'intégrale convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n} = u_n + v_n.$$

Par addition des deux limites établies :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n} = \ln 2.$$

Aucun échange d'une limite et d'une intégrale sur un intervalle non borné n'est nécessaire : les deux parties ont été estimées séparément.

Exercice 2

- 1) a) Si $R(x) = (x^2 - x)P(x)$ et $P \in E$, alors R est un polynôme de degré au plus 4, donc R'' est de degré au plus 2. Ainsi $f(P) \in E$.

Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne :

$$f(aP + bQ) = ((x^2 - x)(aP + bQ))'' = af(P) + bf(Q).$$

L'application est donc linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme.

- 1) b) On calcule directement les trois dérivées secondes :

$$f(e_0)(x) = (x^2 - x)'' = 2,$$

$$f(e_1)(x) = (x^3 - x^2)'' = 6x - 2,$$

$$f(e_2)(x) = (x^4 - x^3)'' = 12x^2 - 6x.$$

Par conséquent $f(e_0) = 2e_0$, $f(e_1) = -2e_0 + 6e_1$ et $f(e_2) = -6e_1 + 12e_2$.

- 1) c) La colonne d'indice $j + 1$ de la matrice dans $\mathcal{B}$ contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans cette base. Les résultats précédents donnent donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

- 1) d) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. C'est le cas de A , dont la diagonale est $(2, 6, 12)$. La matrice de f dans une base est donc inversible, ce qui signifie que f est bijectif : f est un automorphisme de E .
- 2) a) Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ici, elles sont 2, 6 et 12.

On peut aussi contrôler ce résultat sans calcul de déterminant. Si $Av = \lambda v$ et si j est le dernier indice d'une coordonnée non nulle de v , la ligne j de cette égalité impose $\lambda = A_{jj}$. Réciproquement, les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 0)$ et $(1, -5, 5)$ vérifient respectivement les égalités de vecteurs propres pour 2, 6 et 12.

Les trois valeurs propres étant réelles et distinctes, trois vecteurs propres correspondants forment une famille libre. Comme $\dim E = 3$, ils constituent une base. Ainsi f est diagonalisable.

- 2) b) Écrivons un polynôme sous la forme $a + bx + cx^2$. Ses coordonnées propres vérifient :

$$(2 - \lambda)a - 2b = 0, \quad (6 - \lambda)b - 6c = 0, \quad (12 - \lambda)c = 0.$$

Pour $\lambda = 2$, la dernière équation donne $c = 0$, puis la deuxième donne $b = 0$; a est libre. Le sous-espace propre est $\text{Vect}(e_0)$.

Pour $\lambda = 6$, la dernière équation donne $c = 0$ et la première donne $b = -2a$. Le sous-espace propre est $\text{Vect}(e_0 - 2e_1)$.

Pour $\lambda = 12$, les deux premières équations donnent $b = -5a$ et $c = -b = 5a$. Le

sous-espace propre est $\text{Vect}(e_0 - 5e_1 + 5e_2)$.

Les trois espaces ont donc pour bases respectives (1) , $(1 - 2x)$ et $(1 - 5x + 5x^2)$, où les expressions désignent des fonctions polynomiales.

3) a) On choisit les vecteurs propres de 2) b) avec une première coordonnée égale à 1.

La matrice formée de ces trois colonnes est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible, car ses colonnes sont une base de vecteurs propres. On a $AP = PD$, puisque la colonne d'indice j est propre pour le coefficient diagonal d'indice j de D . En multipliant à droite par P^{-1} , on obtient $A = PDP^{-1}$, avec la première ligne de P demandée.

3) b) Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$. Supposons l'égalité vraie à un rang $n \geq 0$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = PD^n P^{-1} P D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}.$$

La récurrence prouve $A^n = PD^n P^{-1}$ pour tout entier $n \geq 0$.

4) a) Pour calculer P^{-1} , résolvons ${}^t(P(a, b, c)) = (r, s, t)^T$. La dernière ligne donne $c = t/5$. La deuxième donne $-2b - 5c = s$, donc $b = -(s + t)/2$. Enfin :

$$a = r - b - c = r + \frac{s}{2} + \frac{3t}{10}.$$

On lit ainsi les coefficients de l'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Ces expressions donnent une solution unique pour tout triplet (r, s, t) et vérifient donc bien la relation d'inversion.

4) b) La matrice D étant diagonale, $D^n = \text{diag}(2^n, 6^n, 12^n)$. On commence par :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 6^n & 12^n \\ 0 & -2 \cdot 6^n & -5 \cdot 12^n \\ 0 & 0 & 5 \cdot 12^n \end{pmatrix}.$$

En multipliant par l'inverse obtenu en 4) a), on trouve, pour tout $n \geq 0$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{2^n - 6^n}{2} & \frac{3 \cdot 2^n - 5 \cdot 6^n + 2 \cdot 12^n}{10} \\ 0 & 6^n & 6^n - 12^n \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, cette expression redonne I_3 ; pour $n = 1$, elle redonne A .

4) c) Un scalaire commute avec toute matrice, donc $B^n = 12^{-n} A^n$. En divisant la formule de 4) b) par 12^n , on obtient :

$$B^n = \begin{pmatrix} (1/6)^n & \frac{(1/6)^n - (1/2)^n}{2} & \frac{3(1/6)^n - 5(1/2)^n + 2}{10} \\ 0 & (1/2)^n & (1/2)^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux suites géométriques tendent vers 0, car leurs raisons sont de valeur absolue

strictement inférieure à 1. Au sens de la définition du sujet :

$$B^n \longrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de J^2 sont nulles. Sa troisième colonne est le produit de J par $(1/5, -1, 1)^T$, qui vaut $(1/5, -1, 1)^T$. Par conséquent $J^2 = J$. Cette vérification directe ne nécessite aucune notion supplémentaire sur les projections.

Exercice 3

- 1) a) Le premier « pile » peut apparaître à n'importe quel rang $k \in \{1, \dots, n\}$: l'événement consistant à obtenir $k - 1$ faces puis un pile a une probabilité strictement positive. La valeur 0 est également possible, lorsque les n lancers donnent face. Aucune autre valeur n'est prévue dans la définition. Ainsi :

$$Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

- 1) b) Pour $Z = 0$, il faut et il suffit d'obtenir n faces. Par indépendance :

$$P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour $1 \leq k \leq n$, il faut obtenir face aux $k - 1$ premiers lancers et pile au rang k ; les lancers ultérieurs sont sans incidence sur Z . Par indépendance :

$$P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Toutes les probabilités calculées sont strictement positives, ce qui justifiera les conditionnements utilisés ensuite.

1) c) La somme géométrique finie de raison $1/2$ donne :

$$\sum_{k=1}^n 2^{-k} = \frac{\frac{1}{2}(1 - 2^{-n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - 2^{-n}.$$

En ajoutant la probabilité de la valeur 0, on obtient bien

$$\sum_{k=0}^n P(Z = k) = 2^{-n} + 1 - 2^{-n} = 1.$$

1) d) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input("n = "))
k = 0
z = 0
lancer = 0
while lancer == 0 and k < n:
    k = k + 1
    lancer = rd.randint(2)
    if lancer == 1:
        z = k
print(z)
```

La variable k compte les lancers déjà effectués. L'initialisation `lancer = 0` permet un premier passage dans la boucle. Après chaque tirage, z reçoit k si pile apparaît ; le test de la boucle devient alors faux et arrête les tirages. Si les n lancers donnent face, la boucle s'arrête par $k < n$ et z a conservé la valeur 0.

Le code complet a été exécuté. Les chemins déterministes « premier pile au rang k », pour tous les rangs admissibles de plusieurs valeurs de n , ainsi que le chemin sans pile,

ont été contrôlés. Les fréquences obtenues par simulation ont aussi été confrontées à la loi de 1) b). La preuve de cette loi reste le calcul d'indépendance précédent.

2) Par définition, le nombre de boules blanches satisfait $0 \leq X \leq Z \leq n$.

La valeur 0 est possible, au moins sur l'événement $[Z = 0]$, de probabilité $2^{-n} > 0$. Pour $1 \leq i \leq n$, l'événement $[Z = i]$ a une probabilité $2^{-i} > 0$; dans l'urne U_i , tirer i fois une boule blanche a une probabilité $(i/n)^i > 0$, car les tirages sont avec remise. Cet événement donne $X = i$.

Toutes les valeurs de 0 à n sont donc possibles et aucune autre ne l'est :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

3) a) Sachant $Z = 0$, aucun tirage n'a lieu et $X = 0$ par définition. Comme

$$P(Z = 0) > 0 :$$

$$P(X = i \mid Z = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

3) b) Sachant $Z = n$, on réalise n tirages dans U_n , dont les n boules sont blanches. On obtient donc $X = n$ à coup sûr. Le conditionnement est licite puisque $P(Z = n) > 0$, et :

$$P(X = i \mid Z = n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } 0 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

3) c) Fixons $k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Sachant $Z = k$, les k tirages avec remise sont des épreuves indépendantes, donnant chacune une boule blanche avec la même probabilité $k/n \in]0, 1[$. Le nombre de boules blanches suit donc, sous cette condition, la loi binomiale de paramètres k et k/n .

Puisque $P(Z = k) > 0$, on a :

$$P(X = i \mid Z = k) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{si } k < i \leq n. \end{cases}$$

- 4) a) Les événements $[Z = k]$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, forment un système complet et ont tous une probabilité strictement positive. La formule des probabilités totales s'applique :

$$P(X = 0) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P(X = 0 \mid Z = k).$$

Le terme $k = 0$ vaut 2^{-n} et le terme $k = n$ est nul. Pour $1 \leq k \leq n - 1$, le terme est $2^{-k}((n-k)/n)^k$. Par conséquent :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.$$

- 4) b) Si $Z < n$, on a $X \leq Z < n$; si $Z = n$, on a $X = n$ à coup sûr d'après 3) b). Ainsi l'événement $[X = n]$ est exactement $[Z = n]$ et :

$$P(X = n) = P(Z = n) = \frac{1}{2^n}.$$

- 4) c) Fixons $1 \leq i \leq n - 1$. Dans la formule des probabilités totales, les termes $k < i$ sont nuls, puisque $X \leq Z$, et le terme $k = n$ est nul d'après 3) b). Les termes restants donnent :

$$P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}.$$

Cette somme finie est l'expression demandée ; aucune réduction n'est nécessaire.

- 5) En ajoutant les expressions de 4) a), 4) b) et 4) c), on regroupe les contributions d'un même indice k . Toutes les sommes sont finies, donc on peut en permuter l'ordre :

$$\sum_{i=0}^n P(X=i) = \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}.$$

La formule du binôme donne, pour chaque k :

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} = \left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right)^k = 1.$$

Il reste donc :

$$\sum_{i=0}^n P(X=i) = 2^{1-n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = 2^{1-n} + 1 - 2^{-(n-1)} = 1.$$

La normalisation de la loi de X est bien vérifiée à partir des expressions explicites.

Problème

- 1) a) On fixe $n \geq 1$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $-n/x \rightarrow -\infty$, donc $e^{-n/x} \rightarrow 0$. En particulier, pour $x > 0$, on a $0 \leq f_n(x) \leq x$. L'encadrement entraîne $f_n(x) \rightarrow 0 = f_n(0)$. La fonction est donc continue à droite en 0.

- 1) b) Pour $x > 0$, son taux d'accroissement à droite en 0 est :

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-n/x}.$$

Il tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. La fonction est donc dérivable à droite en 0 et $f'_{n,+}(0) = 0$.

- 2) a) Sur chacun des intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, les fonctions utilisées dans le produit et la composition sont dérivables. On obtient :

$$f'_n(x) = e^{-n/x} + x \frac{n}{x^2} e^{-n/x} = e^{-n/x} \left(1 + \frac{n}{x} \right) = e^{-n/x} \frac{x+n}{x}.$$

Le facteur exponentiel est strictement positif. Pour $x < -n$, le numérateur et le dénominateur sont négatifs, donc $f'_n(x) > 0$. Pour $x = -n$, la dérivée s'annule. Pour $-n < x < 0$, le quotient est négatif. Enfin, pour $x > 0$, le quotient est positif.

- 2) b) Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, on a $e^{-n/x} \rightarrow 1$, donc $f_n(x)/x \rightarrow 1$. Par conséquent $f_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $f_n(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow 0^-$, posons $t = -n/x$, qui tend vers $+\infty$. Alors :

$$f_n(x) = -n \frac{e^t}{t} \rightarrow -\infty,$$

par croissance comparée de l'exponentielle et de t . La valeur au point critique est $f_n(-n) = -ne$.

Le tableau se lit séparément à gauche et à droite de 0, car la fonction n'est pas continue à gauche en ce point :

Intervalle ou point	$] - \infty, -n[$	$-n$	$] - n, 0[$	0	$]0, +\infty[$
Signe de f'_n	+	0	−	dérivée à droite 0	+
Variation de f_n	de $-\infty$ vers $-ne$	$-ne$	de $-ne$ vers $-\infty$	0	de 0 vers $+\infty$

- 3) a) Le développement limité usuel de l'exponentielle à l'ordre 2 en 0 est :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ lorsque } u \rightarrow 0.$$

- 3) b) Question adaptée au programme actuel : l'opération sur le reste est explicitement guidée dans l'énoncé.

Il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^2\varepsilon(u)$. Pour $x \neq 0$, on remplace u par $-n/x$, puis on multiplie exactement par x :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + \frac{n^2}{x}\varepsilon(-n/x).$$

Pour n fixé, lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, on a $-n/x \rightarrow 0$. Le quotient du dernier terme par $1/x$ vaut $n^2\varepsilon(-n/x)$ et tend donc vers 0. Ainsi :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 3) c) Méthode 1 — Exploiter le développement limité.

La formule précédente montre que $f_n(x) - (x - n) \rightarrow 0$ aux deux infinis. La droite (D_n) d'équation $y = x - n$ est donc une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour le signe de la différence, on écrit :

$$f_n(x) - (x - n) = \frac{n^2}{2x}(1 + \eta(x)),$$

où $\eta(x) \rightarrow 0$ à l'infini considéré. Le facteur entre parenthèses est strictement positif pour $|x|$ assez grand. Le signe est donc celui de $1/x$: (C_n) est au-dessus de (D_n) au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

Méthode 2 — Étudier l'écart de l'exponentielle à sa tangente.

Posons $h(v) = e^v - 1 - v$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(v) = e^v - 1$ est négatif si $v < 0$, nul en 0 et positif si $v > 0$. Comme $h(0) = 0$, son minimum est 0, atteint seulement en 0. Ainsi $h(v) > 0$ pour $v \neq 0$.

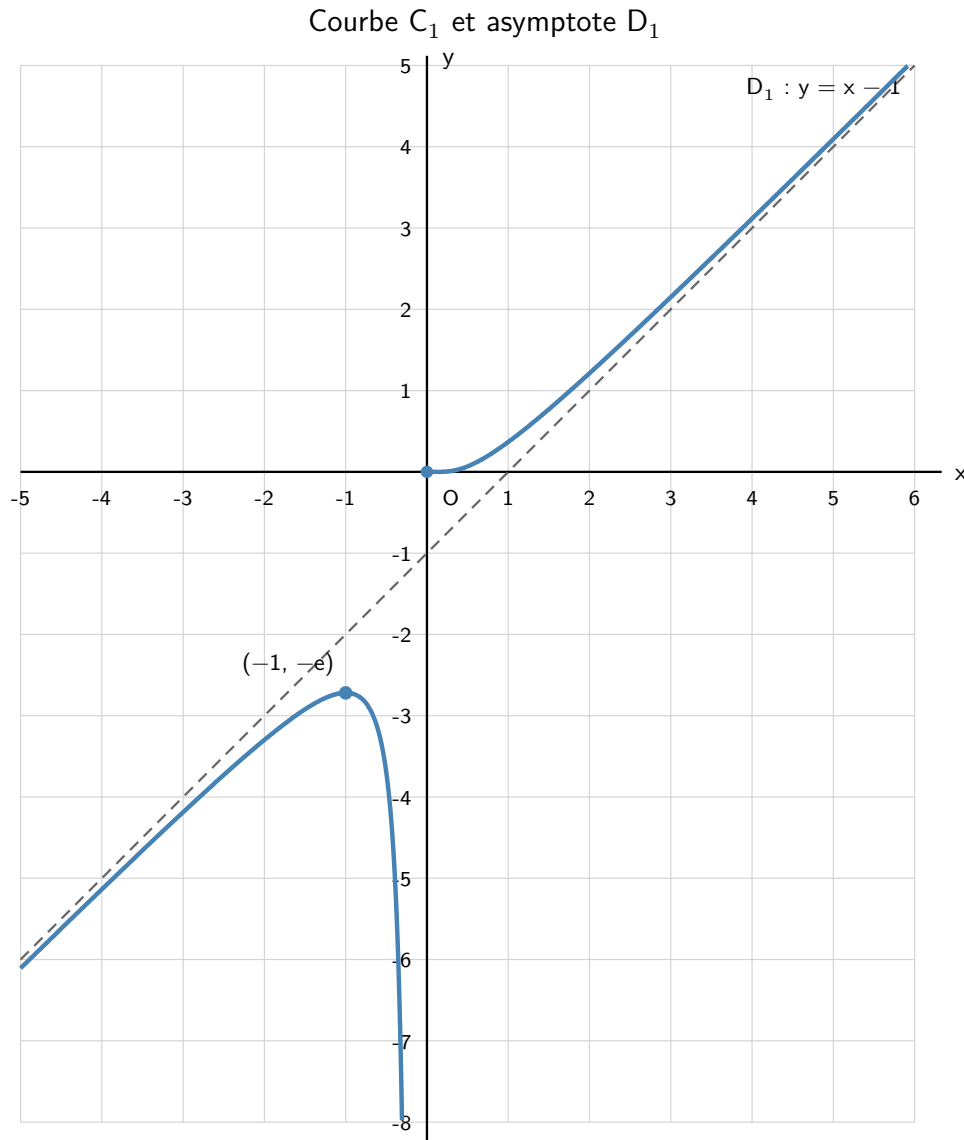
Pour $x \neq 0$ et $n \geq 1$:

$$f_n(x) - (x - n) = x \left(e^{-n/x} - 1 + \frac{n}{x} \right) = xh(-n/x).$$

Le facteur $h(-n/x)$ est strictement positif. L'écart est donc positif pour tout $x > 0$ et négatif pour tout $x < 0$. Cette méthode donne la position relative sur chaque demi-droite entière, tandis que le développement limité établit également l'asymptote et la taille de l'écart.

- 3) d) Pour $n = 1$, la branche de gauche croît jusqu'au maximum $(-1, -e)$, puis décroît vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^-$. La droite $x = 0$ est une asymptote verticale pour cette branche. La branche de droite part du point $O = (0, 0)$ avec une demi-tangente horizontale, puis croît vers $+\infty$.

La droite oblique commune aux deux infinis est $y = x - 1$; la branche de gauche est en dessous et celle de droite au-dessus. Pour préciser la courbure, la dérivation de f'_1 donne $f''_1(x) = e^{-1/x}/x^3$: la branche négative est concave, la branche positive convexe. Ces informations donnent le tracé suivant, dont les axes ont la même unité graphique.



Branche gauche : limite $-\infty$ en 0^- ; branche droite : demi-tangente $y = 0$ en O .

- 4) a) Pour $x < 0$, on a $f_n(x) < 0$, et $f_n(0) = 0$. Il n'existe donc aucune solution de $f_n(x) = 1$ sur $] -\infty, 0]$.

Sur $]0, +\infty[$, la fonction est continue et strictement croissante, avec limite 0 en 0^+ et limite $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème de la bijection garantit donc l'existence d'un unique $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 1$. C'est l'unique solution réelle cherchée.

- 4) b) On a $f_n(1) = e^{-n} < 1 = f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient $u_n > 1$.

Les deux membres de $u_n e^{-n/u_n} = 1$ sont strictement positifs. En prenant leur

logarithme :

$$\ln u_n - \frac{n}{u_n} = 0.$$

La multiplication par $u_n > 0$ donne $u_n \ln u_n = n$. Ainsi u_n est bien solution de l'équation demandée.

4) c) La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable, avec $g'(x) = \ln x + 1 \geq 1 > 0$.

Elle est donc strictement croissante. De plus $g(1) = 0$ et $g(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, dont la réciproque g^{-1} est strictement croissante.

D'après 4) b), $u_n = g^{-1}(n)$. Pour tout réel $R \geq 1$, dès que $n > g(R)$, la stricte croissance donne $g^{-1}(n) > g^{-1}(g(R)) = R$. Les termes u_n dépassent donc tout réel fixé lorsque n est assez grand. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

4) d) Puisque $u_n > 1$, les quantités u_n , $\ln u_n$ et n sont strictement positives. On peut prendre le logarithme de $u_n \ln u_n = n$:

$$\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n.$$

Posons $a_n = \ln u_n$. D'après 4) c), $a_n \rightarrow +\infty$. La croissance comparée du logarithme donne $\ln(a_n)/a_n \rightarrow 0$. Par division de l'identité précédente par $a_n > 0$:

$$\frac{\ln n}{\ln u_n} = 1 + \frac{\ln a_n}{a_n} \rightarrow 1.$$

Il en résulte $\ln u_n \sim \ln n$. Pour $n \geq 2$, on peut ensuite écrire :

$$\frac{u_n}{n/\ln n} = \frac{u_n \ln n}{n} = \frac{\ln n}{\ln u_n} \rightarrow 1.$$

Ainsi $u_n \sim n/\ln n$. Le raisonnement n'utilise pas une composition non justifiée d'équivalents par le logarithme : les rapports ont été établis directement.

5) a) Méthode 1 — Utiliser la réciproque de g .

On a $u_n = g^{-1}(n)$, avec g^{-1} strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $n + 1 > n$, on

obtient $u_{n+1} > u_n$. La suite est donc strictement croissante.

Méthode 2 — Comparer deux fonctions successives.

Pour tout $x > 0$, on a $f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-1/x} < f_n(x)$, car $f_n(x) > 0$ et $e^{-1/x} < 1$. En particulier $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit encore $u_n < u_{n+1}$.

La première preuve exploite l'équation $g(u_n) = n$; la seconde permet de comparer les solutions directement à partir des courbes.

5) b) L'identité $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ donne :

$$u_{n+1}e^{-(n+1)/u_{n+1}} = 1.$$

En multipliant cette égalité par $e^{1/u_{n+1}}$, on obtient :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-n/u_{n+1}} = e^{1/u_{n+1}}.$$

6) a) Le segment $[u_n, u_{n+1}]$ est inclus dans $]0, +\infty[$ et ses bornes sont dans l'ordre strict d'après 5) a). La fonction f_n y est continue et croissante. Pour tout t de ce segment :

$$1 = f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1}) = e^{1/u_{n+1}}.$$

L'intégrale I_n existe donc, et l'intégration de cet encadrement donne :

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)e^{1/u_{n+1}}.$$

La division par $u_{n+1} - u_n > 0$ fournit exactement l'inégalité demandée.

6) b) On sait que $u_{n+1} \rightarrow +\infty$, donc $1/u_{n+1} \rightarrow 0$ et, par continuité de l'exponentielle, $e^{1/u_{n+1}} \rightarrow 1$. Le théorème d'encadrement appliqué à 6) a) donne :

$$\frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \rightarrow 1.$$

Comme les deux termes sont strictement positifs, cela signifie $I_n \sim u_{n+1} - u_n$. On ne soustrait pas les équivalents de u_n et u_{n+1} , opération qui ne serait pas justifiée.

6) c) On utilise directement la minoration de 6) a). Pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^N I_n \geq \sum_{n=1}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_1.$$

Le dernier membre tend vers $+\infty$, puisque $u_{N+1} \rightarrow +\infty$. Les sommes partielles de la série de terme général I_n tendent donc vers $+\infty$. La série est divergente.

Cette preuve repose sur une somme télescopique finie et sur une minoration explicite des sommes partielles ; aucun théorème général de comparaison de séries n'est nécessaire.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule : domaine $n \geq 2$ précisé pour l'intégrale sur $[0, +\infty[$, qui diverge pour $n = 0$ et $n = 1$; la limite recherchée est inchangée.
- Exercice 3, 1) d) : Code adapté en Python. Les deux blancs sont conservés ; le test de poursuite remplace le test d'arrêt et une initialisation de lancer est ajoutée pour préserver le premier tirage. Les commandes de saisie, de conversion, d'affichage et de simulation sont documentées.
- Problème, 3) b) : ajout d'un guidage explicite pour la substitution $u = -n/x$ et pour le traitement du reste du développement limité, les techniques générales de calcul des développements limités n'étant pas exigibles.