



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

1) a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale

$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .

1) b) En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3) a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.

3) b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{1/n}}{n^2}.$$

3) c) Dédurre des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}.$$

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Soit f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f_n est une densité de probabilité. Pour $n = 1$, l'expression nx^{n-1} est la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$.

2) On considère une variable aléatoire réelle X_n dont une densité de probabilité est f_n .
On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n .

2) a) Reconnaitre la loi de X_1 .

2) b) Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n , ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

3) On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n ($n \geq 2$) et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P([U_n \leq x] \cap [V_n \leq x]) = P(U_n \leq x)P(V_n \leq x).$$

On pose $M_n = \sup(U_n, V_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3) a) Pour tout réel x , écrire, en justifiant la réponse, l'événement $[M_n \leq x]$ à l'aide des événements $[U_n \leq x]$ et $[V_n \leq x]$.

3) b) En déduire une densité de M_n . Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

- 3) c) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n , puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

Exercice 3

- 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- 4) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.

Indication : appliquer directement la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 à la fonction $\varphi : x \mapsto xe^x - e^x + 1$, puis utiliser $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$.

- 4) b) Montrer directement que f est dérivable en 0, puis déduire de 4) a) que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

Indication : écrire $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, poser $a(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 1$ pour $x \neq 0$, puis utiliser $\frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$ pour étudier le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- 5) a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xe^x - e^x + 1$.

- 5) b) En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
- 7) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
- 7) b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 7) c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 8) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
- 9) Écrire un programme en Python permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Après l'importation `import numpy as np`, `np.exp(x)` renvoie e^x et `np.log(y)` renvoie $\ln(y)$ pour $y > 0$.

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Ces probabilités de transition dépendent seulement des deux derniers résultats, même lorsque les résultats antérieurs sont connus. Elles définissent le modèle, y compris pour un état qui n'est pas atteint à une date donnée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement «le joueur gagne la n -ième partie».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n, \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n, \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}, \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

1) a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.

1) b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

1) c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On utilise ici des vecteurs colonnes de probabilités : les colonnes de M ont pour somme

1. Avec la convention usuelle d'un vecteur ligne $V_n = {}^t(U_n)$, la matrice de transition est ${}^tM$ et la relation s'écrit $V_{n+1} = V_n {}^tM$.

2) a) Soient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

2) b) On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de P . Calculer MC_1, MC_2, MC_3, MC_4 , puis en déduire que $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de M .

2) c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

- 3) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^n P^{-1}$.
- 3) b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2, \quad U_n = M^{n-2} U_2$.
- 3) c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
- 3) d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$

- 4) Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la k -ième partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
- 4) a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .
- 4) b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .
- 5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
- 5) a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.
- 5) b) Déterminer $P(S_n = n)$.
- 5) c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n .