



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) Pour établir la convergence, on calcule d'abord l'intégrale sur un segment. Pour $x > 0$, la dérivation d'une composée donne :

$$(-e^{1/x})' = \frac{e^{1/x}}{x^2} = f(x).$$

La fonction f est continue sur $[n, b]$ pour tout $b > n \geq 1$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$\int_n^b f(x) dx = e^{1/n} - e^{1/b}.$$

Lorsque $b \rightarrow +\infty$, on a $1/b \rightarrow 0$, donc $e^{1/b} \rightarrow 1$. La limite est finie : l'intégrale généralisée converge et $I_n = e^{1/n} - 1$.

- 1) b) La limite du taux d'accroissement de l'exponentielle en 0 donne $\frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$. Avec $t = 1/n$, on obtient :

$$\frac{I_n}{1/n} = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \rightarrow 1.$$

Ainsi $I_n \sim 1/n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 2) On établit la convergence par une majoration télescopique des sommes partielles, sans supposer un critère général de comparaison de séries.

Pour $k \geq 2$, les inégalités $1/k \leq 1$ et $k(k-1) \leq k^2$ donnent :

$$0 < u_k = \frac{e^{1/k}}{k^2} \leq \frac{e}{k(k-1)} = e \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Par conséquent, pour tout $N \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^N u_k \leq e + e \sum_{k=2}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = e + e \left(1 - \frac{1}{N} \right) \leq 2e.$$

Les sommes partielles sont croissantes puisque les termes sont positifs, et majorées par

2e. Elles convergent donc vers une limite finie. La série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

est convergente.

3) a) On justifie la comparaison sur chaque intervalle à partir de la monotonie de f . La dérivation donne, pour $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^4} - \frac{2e^{1/x}}{x^3} = -\frac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4} < 0.$$

Ainsi f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Les trois fonctions sont continues sur ce segment ; l'intégration et sa positivité donnent :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k),$$

car le segment est de longueur 1.

3) b) Fixons $n \geq 1$ et un entier $N \geq n$. En sommant les inégalités précédentes pour $k = n, \dots, N$, on obtient, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} u_k \leq \int_n^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^N u_k.$$

La série a été montrée convergente en 2), et l'intégrale généralisée converge en 1) a). Le passage à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$ est donc justifié dans chacun des trois termes. Il donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = u_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

En remplaçant u_n par $e^{1/n}/n^2$, on obtient exactement l'encadrement demandé.

3) c) Notons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

L'encadrement précédent se réécrit $I_n - u_n \leq R_n \leq I_n$. On multiplie par $n > 0$:

$$nI_n - \frac{e^{1/n}}{n} \leq nR_n \leq nI_n.$$

D'après 1) b), $nI_n \rightarrow 1$, et $e^{1/n}/n \rightarrow 0$. Les deux bornes tendent vers 1 ; le théorème d'encadrement donne $nR_n \rightarrow 1$.

Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Cette conclusion provient d'un encadrement, sans addition ni soustraction non justifiée d'équivalents.

Exercice 2

- 1) Question adaptée au programme actuel : la valeur de la fonction constante pour $n = 1$ est explicitée, y compris en 0.

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur les intervalles délimités par 0 et 1, avec des limites finies de chaque côté de ces deux points. Enfin, comme elle est nulle en dehors de $[0, 1]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 nx^{n-1} dx = [x^n]_0^1 = 1.$$

Les critères de caractérisation d'une densité sont donc tous vérifiés : f_n est une densité de probabilité.

2) a) La fonction f_1 vaut 1 sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs. C'est une densité de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

2) b) On intègre la densité jusqu'au réel x . Si $x < 0$, la probabilité est nulle ; si $0 \leq x \leq 1$, elle vaut $\int_0^x nt^{n-1} dt = x^n$; si $x > 1$, elle vaut 1. Ainsi :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les intégrales $\int_0^1 x f_n(x) dx$ et $\int_0^1 x^2 f_n(x) dx$ sont absolument convergentes, leurs intégrandes étant continus sur le segment $[0, 1]$. Les deux premiers moments existent et :

$$E(X_n) = n \int_0^1 x^n dx = \frac{n}{n+1}, \quad E(X_n^2) = n \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{n}{n+2}.$$

La formule de König-Huygens est applicable puisque le moment d'ordre 2 est fini. Elle donne :

$$V(X_n) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

3) a) Le maximum de deux nombres est inférieur ou égal à x exactement lorsque chacun des deux nombres est inférieur ou égal à x . Point par point sur Ω , on a donc :

$$[M_n \leq x] = [U_n \leq x] \cap [V_n \leq x].$$

3) b) Les deux variables ont pour fonction de répartition F_n et sont indépendantes. Pour tout réel x , le résultat précédent et l'indépendance donnent :

$$F_{M_n}(x) = P([U_n \leq x] \cap [V_n \leq x]) = F_n(x)^2.$$

Ainsi F_{M_n} vaut 0 pour $x < 0$, x^{2n} pour $0 \leq x \leq 1$, et 1 pour $x > 1$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 en dehors des deux points 0, 1. Une densité de M_n est donc :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} 2nx^{2n-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction vérifie les critères établis en 1), avec l'entier $2n$. Ainsi M_n suit une loi monôme d'ordre $2n$. On applique la formule de l'espérance déjà obtenue en 2) b), sans calculer une nouvelle intégrale :

$$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}.$$

3) c) Pour tous réels u, v , le minimum et le maximum reprennent les deux nombres u, v , éventuellement dans l'ordre inverse. Il en résulte :

$$M_n + T_n = U_n + V_n, \quad T_n = U_n + V_n - M_n.$$

Les trois variables du membre de droite admettent une espérance finie d'après 2) b) et 3) b). Les propriétés opératoires de l'espérance assurent alors que T_n admet une espérance et donnent :

$$E(T_n) = E(U_n) + E(V_n) - E(M_n) = \frac{2n}{n+1} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

La linéarité ne demande aucune indépendance supplémentaire. Ce calcul ne nécessite pas d'intégrale ni l'étude d'une densité de T_n .

Exercice 3

1) La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$. Si $x > 0$, les deux nombres $e^x - 1$ et x sont strictement positifs ; si $x < 0$, ils sont strictement négatifs. Leur quotient est donc strictement positif pour tout $x \neq 0$.

Le logarithme intervenant dans la définition de f est ainsi défini sur $\mathbb{R}^*$.

- 2) Sur $\mathbb{R}^*$, le quotient $(e^x - 1)/x$ est une fonction continue à valeurs strictement positives. Sa composée avec le logarithme est continue.

Au voisinage de 0, la dérivabilité de l'exponentielle donne $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$. Par continuité du logarithme en 1, $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0 = f(0)$.

La fonction f est donc continue sur tout $\mathbb{R}$.

- 3) Sur chacun des deux intervalles ouverts $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, le quotient est de classe C^1 , strictement positif, et le logarithme est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Le théorème de composition montre donc que f est de classe C^1 sur ces deux intervalles.

En posant $h(x) = (e^x - 1)/x$, on a :

$$h'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$

Comme $h(x) > 0$, la dérivation du logarithme donne :

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \quad (x \neq 0).$$

- 4) a) Question adaptée au programme actuel : une indication permet d'appliquer Taylor-Young directement à la fonction du numérateur, sans supposer de techniques générales de calcul des développements limités.

La fonction $\varphi(x) = xe^x - e^x + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Ses dérivées sont $\varphi'(x) = xe^x$ et $\varphi''(x) = (x + 1)e^x$. Ainsi :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 1.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne $\varphi(x) = x^2/2 + o(x^2)$, donc $\varphi(x)/x^2 \rightarrow 1/2$. Par ailleurs :

$$\frac{x(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1.$$

Pour $x \neq 0$, la formule de 3) se réécrit donc :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)/x^2}{(e^x - 1)/x} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

- 4) b) Question adaptée au programme actuel : on établit la dérivabilité au point de raccord avant de conclure à la continuité de la dérivée.

Méthode 1 — Calculer directement le taux d'accroissement.

Taylor-Young appliqué à l'exponentielle, de classe C^2 au voisinage de 0, fournit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

Pour $x \neq 0$, on pose $a(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 1$. L'égalité précédente donne exactement $a(x) = x(1/2 + \varepsilon(x))$. Ainsi $a(x) \rightarrow 0$ et $a(x)/x \rightarrow 1/2$. Pour x non nul assez proche de 0, le facteur $1/2 + \varepsilon(x)$ est strictement positif, donc $a(x) \neq 0$; on peut écrire :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1 + a(x))}{a(x)} \frac{a(x)}{x}.$$

Le premier facteur tend vers 1, par la limite usuelle du taux d'accroissement du logarithme, et le second vers $1/2$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.

Méthode 2 — Utiliser une inégalité des accroissements finis.

On prouve ici le résultat au seul point étudié. Soit $\epsilon > 0$. D'après 4) a), il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(t) - 1/2| \leq \epsilon$ lorsque $0 < |t| < \delta$. Posons $q(t) = f(t) - t/2$.

Pour $0 < x < \delta$ et $0 < a < x$, la fonction q est dérivable sur $[a, x]$, avec $|q'| \leq \epsilon$. L'inégalité des accroissements finis donne $|q(x) - q(a)| \leq \epsilon(x - a)$. Comme f est continue en 0 d'après 2), $q(a) \rightarrow q(0) = 0$ lorsque $a \rightarrow 0^+$. Il vient $|q(x)| \leq \epsilon x$.

Pour $-\delta < x < 0$ et $x < a < 0$, la même inégalité sur $[x, a]$, suivie de $a \rightarrow 0^-$, donne $|q(x)| \leq \epsilon|x|$. Dans les deux cas :

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{1}{2} \right| \leq \epsilon.$$

Cette majoration établit directement $f'(0) = 1/2$, sans invoquer un théorème général de prolongement de la dérivée.

La première méthode calcule le taux d'accroissement à partir d'un développement guidé ; la seconde exploite la limite de la dérivée déjà obtenue et la continuité de f .

Dans les deux cas, la limite de 4) a) est égale à la valeur $f'(0)$. La dérivée est donc continue en 0 ; elle est déjà continue sur les deux autres intervalles d'après 3). Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = xe^x$. Puisque $e^x > 0$, cette dérivée est négative pour $x < 0$, nulle en 0 et positive pour $x > 0$.

Ainsi g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, puis strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Sa valeur minimale est $g(0) = 0$; en particulier, $g(x) > 0$ si $x \neq 0$.

Pour compléter le tableau, $xe^x \rightarrow 0$ et $e^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, donc $g(x) \rightarrow 1$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $g(x) = (x-1)e^x + 1 \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		—	0	+	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

5) b) Rectification de la coquille du PDF : l'expression « signe de (x) » désigne ici le signe de $f'(x)$.

Pour $x \neq 0$, le dénominateur $x(e^x - 1)$ est strictement positif, car ses deux facteurs sont de même signe. Son numérateur est $g(x) > 0$ d'après 5) a). Ainsi $f'(x) > 0$ pour $x \neq 0$. De plus $f'(0) = 1/2 > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$.

Si $x < 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 - e^x}{-x} \right) = \ln(1 - e^x) - \ln(-x).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le premier terme tend vers 0 et le second vers $+\infty$; ainsi $f(x) \rightarrow -\infty$.

Si $x > 0$, on écrit :

$$f(x) = x - \ln x + \ln(1 - e^{-x}).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la croissance comparée donne $\ln x/x \rightarrow 0$, donc $x - \ln x \rightarrow +\infty$, tandis que $\ln(1 - e^{-x}) \rightarrow 0$. Ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	1/2	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) On raisonne par récurrence. L'initialisation est l'hypothèse $u_0 > 0$.

Supposons $u_n > 0$. La stricte croissance de f et l'égalité $f(0) = 0$ donnent

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0.$$

La récurrence est établie : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) a) Pour $x \neq 0$, les arguments des logarithmes suivants sont positifs d'après 1). Les règles du logarithme donnent :

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{xe^x}\right) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x).$$

Pour $x = 0$, les deux membres valent 0. L'identité est donc valable sur tout $\mathbb{R}$.

7) b) Méthode 1 — Utiliser l'identité et la monotonie.

Si $x > 0$, alors $-x < 0$. La stricte croissance de f et $f(0) = 0$ donnent $f(-x) < 0$. D'après

7) a), $f(x) - x = f(-x) < 0$.

Méthode 2 — Démontrer directement une inégalité exponentielle.

Posons $r(x) = x - 1 + e^{-x}$ pour $x \geq 0$. On a $r(0) = 0$ et $r'(x) = 1 - e^{-x} > 0$ pour $x > 0$. Ainsi $r(x) > 0$, soit $1 - e^{-x} < x$ lorsque $x > 0$. En divisant par $x > 0$ puis en utilisant la stricte croissance du logarithme :

$$\ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) < 0.$$

Or cette expression est $f(x) - x$, d'après le calcul de 7) a). On retrouve donc $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La première méthode réutilise immédiatement le tableau de variations ; la seconde met en évidence l'inégalité $1 - e^{-x} < x$, réutilisable dans d'autres études.

7) c) D'après 6), $u_n > 0$. On peut donc appliquer 7) b) à $x = u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0.$$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

8) La suite est décroissante et minorée par 0. Le théorème de convergence des suites monotones donne une limite $\ell \geq 0$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après 2). En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$.

Si $\ell > 0$, l'inégalité de 7) b) donnerait $f(\ell) < \ell$, contradiction. Par conséquent $\ell = 0$. Ainsi $u_n \rightarrow 0$.

9) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np
```

```
u = 1.0
```

```
n = 0
```

```
while u > 1e-3:
    u = np.log((np.exp(u) - 1) / u)
    n = n + 1
print(n)
```

Au début de chaque passage dans la boucle, u représente u_n . La mise à jour calcule u_{n+1} , puis incrémente l'indice de 1. Le quotient et le logarithme sont définis car $u_n > 0$. La convergence vers 0 assure l'existence d'un premier indice où le seuil est atteint.

La boucle continue tant que le terme est strictement supérieur à 10^{-3} . Elle s'arrête donc au premier indice satisfaisant $u_n \leq 10^{-3}$.

Ce bloc a été exécuté : il affiche 11. Les deux termes encadrant l'arrêt ont été contrôlés numériquement : $u_{10} \approx 0,00115838 > 10^{-3}$ et $u_{11} \approx 0,000579246 \leq 10^{-3}$. Ces valeurs illustrent l'algorithme ; les propriétés de la suite et la terminaison sont justifiées par les questions précédentes.

Problème

- 1) a) Question adaptée au programme actuel : les probabilités de transition du modèle sont explicitées, sans définir un conditionnement sur un événement éventuellement nul.

L'événement $E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$ peut se produire à partir de E_n ou de F_n , mais pas à partir de G_n ou de H_n , puisque ces deux derniers imposent une défaite à la partie n .

Si $P(E_n) > 0$, le modèle donne $P(E_n \cap A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n)$; si $P(E_n) = 0$, la même égalité reste vraie car les deux membres sont nuls. De même, $P(F_n \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(F_n)$, que F_n soit de probabilité positive ou nulle.

La formule des probabilités totales, sous sa forme utilisant les intersections avec le système complet (E_n, F_n, G_n, H_n) , donne donc :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n).$$

1) b) Les transitions possibles donnent :

$$P(F_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n),$$

$$P(G_{n+1}) = \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n),$$

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n).$$

En effet, F_{n+1} correspond à une défaite suivie d'une victoire, G_{n+1} à une victoire suivie d'une défaite, et H_{n+1} à deux défaites. Chaque coefficient est la probabilité du prochain résultat à partir de l'état indiqué ; les égalités en termes d'intersections restent valables lorsqu'un état a une probabilité nulle.

1) c) En empilant les quatre égalités précédentes dans l'ordre E, F, G, H , on obtient :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} U_n = MU_n.$$

Tous les coefficients de M sont positifs ou nuls, et chaque colonne a pour somme 1, ce qui est cohérent avec les colonnes de probabilités employées ici.

Question adaptée au programme actuel : la convention est explicitée dans le sujet. En transposant, $V_n = {}^t(U_n)$ satisfait $V_{n+1} = V_n {}^tM$; la matrice de transition avec la convention en lignes est donc ${}^tM$, dont chaque ligne a pour somme 1.

2) a) On effectue le produit ligne par colonne. Les quatre lignes de PQ sont respectivement :

$$(-1 + 2 + 6 + 3, -3 - 3 + 3 + 3, 3 - 3 - 3 + 3, 1 + 2 - 6 + 3) = (10, 0, 0, 0),$$

$$(2 - 2 - 2 + 2, 6 + 3 - 1 + 2, -6 + 3 + 1 + 2, -2 - 2 + 2 + 2) = (0, 10, 0, 0),$$

$$(-2 - 2 + 2 + 2, -6 + 3 + 1 + 2, 6 + 3 - 1 + 2, 2 - 2 - 2 + 2) = (0, 0, 10, 0),$$

$$(1 + 2 - 6 + 3, 3 - 3 - 3 + 3, -3 - 3 + 3 + 3, -1 + 2 + 6 + 3) = (0, 0, 0, 10).$$

Ainsi $PQ = 10I_4$, donc $P(Q/10) = I_4$. En particulier, tout vecteur Y de $\mathbb{R}^4$ s'écrit $Y = P(QY/10)$: l'application linéaire de matrice P est surjective. C'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie ; elle est donc bijective. La matrice P est inversible et :

$$P^{-1} = \frac{1}{10}Q.$$

2) b) Les produits avec les colonnes sont :

$$MC_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}C_1, \quad MC_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}C_2,$$

$$MC_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}C_3, \quad MC_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_4.$$

Chaque colonne est non nulle ; les quatre nombres $-1/3, 1/6, 1/2, 1$ sont donc des valeurs propres de M . Comme P est inversible, ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres.

Pour voir qu'il n'y en a pas d'autres, si $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, on décompose

$$X = \sum_{j=1}^4 x_j C_j.$$

L'indépendance des colonnes donne $(\lambda_j - \lambda)x_j = 0$ pour chaque j , où les λ_j sont les quatre valeurs précédentes. Au moins un coefficient x_j est non nul ; alors $\lambda = \lambda_j$. Le spectre est donc exactement $\{-1/3, 1/6, 1/2, 1\}$.

2) c) Le produit MP est la matrice dont les colonnes sont $MC_1, \dots, MC_4$. Les égalités précédentes donnent $MP = PD$, avec :

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On multiplie à droite par P^{-1} , dont l'existence a été prouvée en 2) a). Il vient $M = PDP^{-1}$.

Le joueur ayant gagné les deux premières parties, on a désormais $U_2 = {}^t(1, 0, 0, 0)$.

3) a) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_4 = M^0$.

Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$. Alors, en utilisant 2) c) et l'associativité du produit :

$$M^{n+1} = M^n M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La formule est ainsi établie pour tout entier naturel n .

3) b) L'initialisation au rang 2 est $U_2 = M^0 U_2$.

Supposons $U_n = M^{n-2} U_2$ pour un entier $n \geq 2$. D'après 1) c), $U_{n+1} = M U_n = M^{n-1} U_2$.

Par récurrence, $U_n = M^{n-2} U_2$ pour tout $n \geq 2$.

3) c) Pour calculer la première colonne, on note $e_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$ et, pour tout entier $m \geq 0$:

$$a_m = \left(-\frac{1}{3}\right)^m, \quad b_m = \left(\frac{1}{6}\right)^m, \quad c_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

La première colonne de P^{-1} est $\frac{1}{10} {}^t(-1, 2, 2, 1)$. En utilisant 3) a), on obtient :

$$M^m e_1 = P D^m P^{-1} e_1 = -\frac{a_m}{10} C_1 + \frac{b_m}{5} C_2 + \frac{c_m}{5} C_3 + \frac{1}{10} C_4.$$

En remplaçant les colonnes par leurs coordonnées :

$$M^m e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} - \frac{a_m}{10} + \frac{b_m}{5} + \frac{3c_m}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{a_m}{5} - \frac{b_m}{5} - \frac{c_m}{5} \\ \frac{1}{5} - \frac{a_m}{5} - \frac{b_m}{5} + \frac{c_m}{5} \\ \frac{3}{10} + \frac{a_m}{10} + \frac{b_m}{5} - \frac{3c_m}{5} \end{pmatrix}.$$

Cette formule donne en particulier la première colonne de M^n demandée pour $n \geq 2$. Le calcul est en fait valable aussi pour $m = 0$ et $m = 1$.

Comme $U_2 = e_1$, la formule de 3) b) montre que U_n est la première colonne de M^{n-2} .

Pour tout $n \geq 2$, on a donc :

$$P(E_n) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$P(F_n) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$P(G_n) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$P(H_n) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Au rang $n = 2$, elles donnent bien 1, 0, 0, 0. Leurs sommes valent 1 pour tout n , conformément au système complet.

- 3) d) Les trois nombres $-1/3$, $1/6$ et $1/2$ ont une valeur absolue strictement inférieure à 1. Leurs puissances tendent donc vers 0. Dans les quatre expressions de 3) c), seuls les termes constants subsistent à la limite :

$$P(E_n) \rightarrow \frac{3}{10}, \quad P(F_n) \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \quad P(G_n) \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \quad P(H_n) \rightarrow \frac{3}{10}.$$

Les limites sont ainsi établies par les formules explicites propres à ce modèle.

- 4) a) L'événement A_k se décompose selon le résultat de la partie $k - 1$:

$$A_k = (A_{k-1} \cap A_k) \cup (\overline{A_{k-1}} \cap A_k) = E_k \cup F_k.$$

Les deux événements de cette réunion sont incompatibles.

- 4) b) La variable X_k est l'indicatrice de A_k , donc suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k = P(A_k)$, éventuellement égal à 1 dans le cas certain $k = 2$.

La réunion disjointe précédente donne $p_k = P(E_k) + P(F_k)$. En additionnant les deux expressions de 3) c), les termes de raison $1/6$ s'annulent. On obtient, pour $k \geq 2$:

$$p_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Ainsi $P(X_k = 1) = p_k$ et $P(X_k = 0) = 1 - p_k$. Pour $k = 2$, $p_2 = 1$, ce qui retrouve la victoire certaine ; pour $k = 3$, $p_3 = 2/3$, conformément au modèle.

- 5) a) Question adaptée au programme actuel : la dépendance du prochain résultat aux seuls deux derniers résultats est explicitée dans le sujet pour justifier les probabilités des parcours.

Les deux premières parties étant gagnées, l'événement $[S_n = 2]$ signifie que toutes les parties suivantes sont perdues.

Si $n = 2$, aucun résultat supplémentaire n'est demandé : $P(S_2 = 2) = 1$.

Si $n = 3$, il faut perdre après deux victoires, ce qui a pour probabilité $1 - 2/3 = 1/3$: $P(S_3 = 2) = 1/3$.

Si $n \geq 4$, on doit d'abord perdre la troisième partie après deux victoires, avec probabilité $1/3$, puis perdre la quatrième après une victoire et une défaite, avec probabilité $1/2$. Les deux derniers résultats sont alors deux défaites ; chacune des $n - 4$ parties restantes doit être perdue, avec probabilité de transition $2/3$. La formule des probabilités composées et la mémoire précisée dans l'énoncé donnent :

$$P(S_n = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4} \quad (n \geq 4).$$

Le facteur puissance vaut 1 au rang $n = 4$. Tous les événements de parcours sur lesquels on conditionne ont une probabilité strictement positive, car les transitions utilisées sont strictement positives.

- 5) b) Pour avoir $S_n = n$, il faut gagner toutes les parties $3, \dots, n$. Avant chacune d'elles, les deux derniers résultats sont deux victoires, donc la probabilité de la victoire suivante est $2/3$.

Par les probabilités composées et le modèle à mémoire de deux résultats :

$$P(S_n = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Pour $n = 2$, la puissance est nulle et la probabilité vaut 1, comme attendu. Pour $n > 2$, tous les parcours intermédiaires ont une probabilité positive ; les probabilités conditionnelles sont donc bien définies.

5) c) Puisque chaque X_k indique une victoire à la partie k , on a point par point :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = 2 + \sum_{k=3}^n X_k.$$

Les variables sont bornées, donc leurs espérances existent. La linéarité de l'espérance s'applique à cette somme finie sans exiger d'indépendance ; on ne suppose d'ailleurs pas les résultats des parties indépendants. D'après 4) b) :

$$E(S_n) = 2 + \frac{n-2}{2} + \frac{1}{10} \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{5} \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

En posant $j = k - 2$, les deux sommes géométriques commencent à $j = 1$ et se terminent à $j = n - 2$. Leurs raisons étant différentes de 1 :

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left(-\frac{1}{3}\right)^j = -\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

En reportant :

$$E(S_n) = 2 + \frac{n-2}{2} - \frac{1}{40} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) + \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right).$$

Le terme constant en dehors de $n/2$ est $1 - 1/40 + 2/5 = 11/8$. Ainsi, pour $n \geq 3$:

$$E(S_n) = \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Relevé des adaptations

- Exercice 2, 1) : la fonction f_1 est explicitée comme la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$, pour lever toute ambiguïté d'évaluation de la notation x^{n-1} en 0.
- Exercice 3, 4) a) : indication d'une application directe de Taylor-Young d'ordre 2 à la fonction du numérateur, sans techniques générales de calcul de développements limités supposées connues.
- Exercice 3, 4) b) : la dérivabilité en 0 est établie directement avant la continuité de la dérivée ; indication par Taylor-Young et taux d'accroissement du logarithme ajoutée. Une preuve particulière par inégalités des accroissements finis est aussi détaillée ; aucun théorème général de prolongement de la dérivée n'est supposé connu.
- Exercice 3, 5) b) : rectification de la coquille « signe de (x) » du PDF en « signe de $f'(x)$ ».
- Exercice 3, 9) : Code adapté en Python ; rôle de `np.exp` et `np.log` documenté dans le sujet.
- Problème, préambule, 1) a), 5) a) et 5) b) : mémoire limitée aux deux derniers résultats explicitée pour rendre entièrement déterminées les probabilités des parcours ; transitions décrites comme données du modèle, sans conditionnement par un événement de probabilité nulle.
- Problème, 1) c) : convention en colonnes conservée et transposition vers la convention en lignes explicitée.