



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Pour tout nombre réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$. On prend $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

On pose $Y = [X]$; Y est donc la partie entière de X et on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\{Y = k\} = \{k \leq X < k + 1\}$.

- 1) a. Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
- b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
- c. En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
- d. Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .

2) On pose $Z = X - Y$.

- a. Déterminer $Z(\Omega)$.
- b. En utilisant le système complet d'événements $(\{Y = k\})_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

- c. En déduire une densité f de Z .
- d. Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z . Ce résultat était-il prévisible?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois, indépendamment, une pièce de monnaie donnant «pile» avec la probabilité p , où $0 < p < 1$, et «face» avec la probabilité $q = 1 - p$.

On appelle k -chaîne de «pile» une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné «pile», cette suite devant être précédée d'un «face» ou commencer au premier lancer, et être suivie d'un «face» ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k -chaînes de «pile» obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra noter P_k l'événement «on obtient pile au k -ième lancer».

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$, alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'espérance de Y_k , notée $E(Y_k)$.

- 1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
- 2) Pour $n \geq 2$, montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
- 3) Dans cette question, $n \geq 3$ et k désigne un entier de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k -chaîne de «pile» commence au i -ième lancer et qui vaut 0 sinon.

- a. Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
- b. Soit $i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
- c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

- d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{-x \ln x}{1 + x^2}, \quad f(0) = 0.$$

- 1) a. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- b. Étudier le signe de $f(x)$.

- 2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

- a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme :

$$g'(x) = \frac{-x h(x)}{1 + x^2}.$$

- b. Étudier les variations de h , puis en déduire son signe ; on donne $\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq -0,48$.

- c. En déduire le signe de $g(x)$.

- 4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.
- Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.
 - En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

- 1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
- b. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
- c. Donner la dimension de E .
- 2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E .
- b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
- c. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .
- 3) a. Montrer que L est diagonalisable.
- b. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
- 4) On considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- b. Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, \frac{1}{2}]$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant, elles, le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers chacun des deux sommets voisins, reliés par un côté, avec la probabilité p , ou vers le sommet opposé, relié par une diagonale, avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc $X_0 = 1$.

1) a. Écrire la matrice A , carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i donnée par le protocole. Lorsque $P(X_n = j) > 0$, ce terme est égal à $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$.

b. Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et de L .

2) a. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, calculer Au_i . En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P .

b. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1} .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.
- b. En déduire que $C_n = \frac{1}{4}PD^nPC_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.