



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

On pose $r = e^{-\lambda}$. Comme $\lambda > 0$, on a $0 < r < 1$. La fonction de répartition de X vaut 0 sur $] -\infty, 0[$ et $1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Une variable à densité ne charge aucun point.

- 1) a. La partie entière d'un réel positif est un entier positif ou nul. Ainsi, pour toute issue ω , $X(\omega) \geq 0$ implique $Y(\omega) = [X(\omega)] \in \mathbb{N}$.

Donc Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Avec le choix $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, tout entier naturel est effectivement atteint.

Question adaptée au programme actuel : la précision $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ ajoutée au préambule fixe une réalisation de la loi ; elle permet de parler exactement des images dans la question 2.a, sans confondre image et loi. Elle ne change aucune probabilité.

- b. Pour $k \geq 1$, l'événement $\{Y = k - 1\}$ est $\{k - 1 \leq X < k\}$. Les bornes sont positives ou nulles et ont une probabilité nulle. Par différence de fonctions de répartition :

$$P(Y = k - 1) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - r)r^{k-1}.$$

La formule reste valable pour $k = 1$, où elle donne $P(Y = 0) = 1 - r$.

- c. La variable $Y + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \geq 1$,

$$P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = (1 - r)r^{k-1}.$$

Il s'agit exactement de la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1 - r = 1 - e^{-\lambda} \in]0, 1[$.
Donc $Y + 1 \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.

- d. Une variable de loi géométrique de paramètre $a \in]0, 1]$ possède une espérance $1/a$ et une variance $(1 - a)/a^2$. En appliquant ces résultats avec $a = 1 - r > 0$:

$$E(Y + 1) = \frac{1}{1-r}, \quad V(Y + 1) = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Les moments existent donc. La linéarité de l'espérance et la formule $V(U + b) = V(U)$ donnent :

$$E(Y) = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r} = \frac{1}{e^\lambda - 1}, \quad V(Y) = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Autrement dit,
$$V(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}.$$

2) a. Par définition de la partie entière, $Y \leq X < Y + 1$, donc $0 \leq Z < 1$.

Réciproquement, pour tout $z \in [0, 1[$, le choix d'une issue telle que $X = z$, possible puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donne $Y = 0$ et $Z = z$.

Ainsi $Z(\Omega) = [0, 1[$. Sans convention sur la réalisation de X , l'inclusion dans cet intervalle resterait toujours vraie, et la loi calculée ensuite serait inchangée.

b. Fixons $x \in [0, 1[$. Les événements $\{Y = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements. Pour chacun d'eux,

$$\{Z \leq x\} \cap \{Y = k\} = \{k \leq X \leq k + x\}.$$

En effet, sur $\{Y = k\}$ on a $Z = X - k$ et, puisque $x < 1$, la condition $X \leq k + x$ assure déjà $X < k + 1$. Par les probabilités totales, sous leur forme en intersections :

$$P(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X \leq k + x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}).$$

Les termes sont positifs ou nuls ; en factorisant le nombre constant $1 - e^{-\lambda x}$ puis en utilisant la série géométrique de raison $r \in]0, 1[$, on obtient :

$$P(Z \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Pour $x = 0$, chaque probabilité d'un singleton est nulle et la formule donne bien 0.

c. La fonction de répartition complète de Z est :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Elle est continue en 0, car la formule centrale y vaut 0, et en 1, car sa limite à gauche vaut 1. Elle est de classe C^1 sur chacun des trois intervalles ouverts séparés par 0 et 1. En la dérivant sur ces intervalles, une densité est donc :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs de la densité aux deux bornes peuvent être choisies arbitrairement positives ou nulles. Cette densité est positive, possède des limites latérales finies et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{[-e^{-\lambda x}]_0^1}{1 - e^{-\lambda}} = 1.$$

d. Méthode 1 — Calcul à l'aide de la densité.

Puisque $0 \leq Z < 1$, Z admet une espérance. L'intégrale de $|x|f(x)$ est finie, son intégrande étant borné sur $[0, 1]$ et nul en dehors. Ainsi :

$$E(Z) = \frac{1}{1-r} \int_0^1 x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

On intègre par parties sur le segment $[0, 1]$, avec les fonctions de classe C^1 $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^1 x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-\lambda x} dx = -r + \frac{1-r}{\lambda}.$$

On conclut que :

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{r}{1-r} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

Méthode 2 — Utiliser la décomposition de X .

La loi exponentielle donne $E(X) = 1/\lambda$; la question 1.d a établi $E(Y) = r/(1-r)$. Les deux variables sont intégrables, donc leur différence l'est et la linéarité s'applique sans supposer d'indépendance :

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{r}{1-r}.$$

Le résultat était donc prévisible à partir de $X = Y + Z$. La première méthode retrouve directement l'espérance à partir de la nouvelle loi; la seconde utilise les moments déjà connus et évite le calcul d'intégrale.

Exercice 2

Question adaptée au programme actuel : le préambule précise l'indépendance des lancers et le fait qu'une chaîne est maximale à gauche comme à droite. Sans la condition à gauche, une suite plus longue contiendrait des suffixes comptés comme chaînes plus courtes, en contradiction avec l'exemple et les formules des questions 2 et 3.b.

- 1) Il y a une n -chaîne si et seulement si les n lancers donnent tous pile. Les lancers étant indépendants, cet événement a la probabilité p^n .

Le nombre Y_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Sa loi est donc :

$$P(Y_n = 1) = p^n, \quad P(Y_n = 0) = 1 - p^n.$$

Ainsi Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^n et $E(Y_n) = p^n$. Ce résultat vaut aussi pour $n = 1$.

- 2) Question adaptée au programme actuel : on précise $n \geq 2$, car la notation Y_{n-1} n'est définie dans l'énoncé que pour $n - 1 \geq 1$.

Une chaîne de longueur $n - 1$ ne peut commencer qu'au premier ou au deuxième lancer. Elle est présente exactement dans les deux configurations :

$$\underbrace{P \dots P}_{n-1 \text{ piles}} F \quad \text{ou} \quad F \underbrace{P \dots P}_{n-1 \text{ piles}}.$$

Ces événements sont incompatibles, y compris pour $n = 2$. Chacun a la probabilité qp^{n-1} par indépendance, donc :

$$P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}.$$

Il ne peut exister deux chaînes de longueur $n - 1$: pour $n \geq 3$, elles nécessiteraient au

moins $2(n-1) + 1 > n$ lancers, face séparateur compris ; pour $n = 2$, les deux configurations ci-dessus ne peuvent se réaliser simultanément. Ainsi $Y_{n-1} \in \{0, 1\}$, et :

$$E(Y_{n-1}) = P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}.$$

3) Question adaptée au programme actuel : la condition $n \geq 3$ rend possible le choix $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Pour $i > n-k+1$, il ne reste pas assez de lancers pour une k -chaîne, donc $X_{i,k} = 0$.

a. Une k -chaîne commence au premier lancer exactement si les lancers 1 à k donnent pile et si le lancer $k+1$ donne face. Ce dernier lancer existe puisque $k \leq n-2$. Aucun lancer antérieur n'est à imposer.

Par indépendance, $P(X_{1,k} = 1) = p^k q$.

b. Pour $2 \leq i \leq n-k$, les deux lancers encadrant la chaîne existent. L'événement $\{X_{i,k} = 1\}$ impose face au lancer $i-1$, pile aux k lancers $i, \dots, i+k-1$, puis face au lancer $i+k$.

Ces $k+2$ conditions portent sur des lancers distincts et indépendants. Par conséquent :

$$P(X_{i,k} = 1) = qp^k q = q^2 p^k.$$

c. Une chaîne commençant au lancer $n-k+1$ finit au dernier lancer. Il faut donc face au lancer $n-k$, puis pile aux lancers $n-k+1, \dots, n$. Le lancer précédent existe puisque $k \leq n-2$.

Il n'y a aucune condition après le dernier lancer. L'indépendance donne

$$P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k.$$

d. Chaque chaîne possède un unique début et chaque indicatrice compte exactement une chaîne commençant à sa position. Ainsi :

$$Y_k = \sum_{i=1}^n X_{i,k} = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}.$$

Les variables sont bornées, donc intégrables. La linéarité de l'espérance s'applique même si les indicatrices ne sont pas indépendantes. Chacune étant de Bernoulli, son espérance est sa probabilité de valoir 1. Les indices intérieurs sont $2, \dots, n-k$, au nombre de $n-k-1$. D'où :

$$E(Y_k) = qp^k + (n-k-1)q^2p^k + qp^k = p^k(2q + (n-k-1)q^2).$$

Les trois questions couvrent tous les indices $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: pour $k = n$ on utilise la question 1, pour $k = n-1$ la question 2, et pour $k \leq n-2$ cette formule. Lorsque $n = 1$, seule la question 1 est nécessaire ; lorsque $n = 2$, les questions 1 et 2 suffisent.

Exercice 3

- 1) a. Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont continues, et le dénominateur est strictement positif. Leur quotient f est donc continu sur cet intervalle.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Comme $1 + x^2 \rightarrow 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- b. Pour $x > 0$, le facteur $x/(1 + x^2)$ est strictement positif ; le signe de $f(x)$ est donc l'opposé de celui de $\ln x$.

Il en résulte $f(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $f(1) = 0$ et $f(x) < 0$ pour $x > 1$. On a également $f(0) = 0$. Ainsi f est positive ou nulle sur $[0, 1]$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$.

- 2) Pour chaque $x \geq 0$, f est continue sur le segment $[0, x]$. L'intégrale $\int_0^x f(t) dt$ est donc bien définie et finie ; elle vaut 0 si $x = 0$.

Cela définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$; elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- 3) a. Sur $]0, +\infty[$, g est dérivable comme différence de F et de l'identité, et :

$$g'(x) = f(x) - 1 = \frac{-x \ln x - 1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{-x \left(\ln x + x + \frac{1}{x} \right)}{1 + x^2}.$$

La fonction cherchée est donc $h(x) = x + \ln x + \frac{1}{x}$, définie pour $x > 0$.

À la borne 0, « dérivable sur $\mathbb{R}_+$ » s'entend avec une dérivée à droite. Pour $x > 0$, la continuité de f en 0 et la majoration de l'intégrale donnent :

$$\left| \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq x} |f(t)|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de f en 0 fournit $\delta > 0$ tel que $|f(t)| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq \delta$. Le membre de droite tend donc vers 0 avec x . Ainsi $F'_+(0) = 0$, puis $g'_+(0) = -1$.

- b. Méthode 1 — Variations de h , comme demandé.

La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}.$$

Le trinôme du numérateur possède deux racines $(-1 - \sqrt{5})/2 < 0$ et $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2 > 0$. Il est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur. Le dénominateur étant positif, h est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Pour compléter les variations, à l'infini $h(x) \rightarrow +\infty$. Au voisinage de 0, on écrit $h(x) = (1 + x \ln x + x^2)/x$; le numérateur tend vers 1 et $x \rightarrow 0^+$, donc $h(x) \rightarrow +\infty$.

Le minimum global est atteint en α . Puisque $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, $1/\alpha = \alpha + 1$, d'où :

$$h(\alpha) = 2\alpha + 1 + \ln \alpha = \sqrt{5} + \ln \alpha.$$

L'approximation fournie donne $h(\alpha) \simeq 1,76 > 0$. Pour justifier rigoureusement le signe sans dépendre de l'arrondi, remarquons que $1/2 < \alpha < 1$. Donc $\ln \alpha > -\ln 2$, tandis que $\ln 2 = \int_1^2 dt/t < 1$. Ainsi :

$$h(\alpha) > \sqrt{5} - 1 > 0.$$

On conclut que $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Une inégalité logarithmique pour le signe.

Cette seconde approche remplace seulement la déduction du signe ; les variations demandées sont celles établies ci-dessus. Pour $x > 0$, posons $v(x) = \ln x - 1 + 1/x$. On a $v'(x) = (x - 1)/x^2$; v décroît jusqu'à 1, puis croît. Son minimum est $v(1) = 0$. Ainsi $\ln x \geq 1 - 1/x$ pour tout $x > 0$.

Par conséquent $h(x) = x + \ln x + 1/x \geq x + 1 > 0$. Le signe est établi directement, sans calcul du minimum de h . L'étude des variations localise le minimum ; l'inégalité fournit une minoration plus simple lorsqu'on cherche uniquement la positivité.

- c. Pour $x > 0$, on a $x > 0$, $1 + x^2 > 0$ et $h(x) > 0$. La formule de la question 3.a donne donc $g'(x) < 0$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante et vérifie $g(0) = F(0) = 0$. On en déduit $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et $g(0) = 0$.

En particulier, $F(x) < x$ pour tout $x > 0$ et $F(0) = 0$.

- 4) a. Montrons d'abord que F envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Pour $0 \leq x \leq 1$, $f \geq 0$ sur $[0, x]$, donc $F(x) \geq 0$. D'autre part, la question 3.c donne $F(x) \leq x \leq 1$.

Au rang initial, $u_0 = 1 \in [0, 1]$. Si $u_n \in [0, 1]$, la propriété précédente montre que $u_{n+1} = F(u_n) \in [0, 1]$. Par récurrence, la suite est bien définie et $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b. Pour tout $n \geq 0$, le résultat de la question 3 donne :

$$u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0.$$

Ainsi (u_n) est décroissante. Elle est même strictement décroissante : si $x \in]0, 1]$, f est continue, positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[0, x]$, donc $F(x) > 0$. Partant de $u_0 = 1 > 0$, tous les u_n sont strictement positifs et $g(u_n) < 0$.

- c. Méthode 1 — Limite monotone et point fixe.

La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. La fonction F étant continue sur cet intervalle, le passage à la limite dans $u_{n+1} = F(u_n)$ donne $\ell = F(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

La question 3.c montre que le seul zéro de g sur $\mathbb{R}_+$ est 0. Par conséquent $\ell = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Méthode 2 — Majoration géométrique.

Sur $]0, 1]$, la fonction $w(t) = -t \ln t$ a pour dérivée $w'(t) = -\ln t - 1$. Cette dérivée est positive pour $t < e^{-1}$, nulle en e^{-1} et négative au-delà. Avec $w(0) = 0$ par prolongement continu, son maximum sur $[0, 1]$ vaut $w(e^{-1}) = 1/e$.

Donc, pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq f(t) = w(t)/(1+t^2) \leq 1/e$. Pour $x \in [0, 1]$, l'intégration donne $0 \leq F(x) \leq x/e$. Comme tous les u_n sont dans cet intervalle, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n/e$; une récurrence donne $0 \leq u_n \leq e^{-n}$.

La suite géométrique e^{-n} tend vers 0, donc l'encadrement donne de nouveau $u_n \rightarrow 0$. La première méthode identifie la limite grâce aux points fixes; la seconde apporte en plus une vitesse de convergence majorée géométriquement.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices

- 1) a. Par définition, $E = \text{Vect}(I, J, K, L)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par ces quatre matrices. En particulier, il contient la matrice nulle.

Explicitement, si $M = aI + bJ + cK + dL$ et $N = a'I + b'J + c'K + d'L$ appartiennent à E , alors, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$sM + tN = (sa + ta')I + (sb + tb')J + (sc + tc')K + (sd + td')L \in E.$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

- b. Supposons $aI + bJ + cK + dL = 0$. La première ligne de cette matrice est (a, c, d, b) . Elle doit être nulle, ce qui impose successivement $a = 0, c = 0, d = 0$ et $b = 0$.

La seule combinaison linéaire nulle est donc la combinaison triviale. Ainsi (I, J, K, L) est libre.

- c. La famille (I, J, K, L) engendre E par définition et est libre d'après la question 1.b. Elle est donc une base de E . Comme elle comporte quatre matrices, $\dim E = 4$.

- 2) a. On calcule les produits en utilisant la règle ligne-colonne. On obtient :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L,$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$J^3 = J^2 J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K, \quad K^3 = K^2 K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

Par exemple, pour une colonne $V = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $JV = {}^t(x_4, x_1, x_2, x_3)$ et $KV = {}^t(x_2, x_3, x_4, x_1)$; les applications répétées vérifient chaque colonne des produits affichés. Ces cinq puissances sont égales à des éléments de la famille génératrice, donc appartiennent à E .

- b.** La question précédente donne $L = J^2$, $K = J^3$ et $J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. On utilise seulement l'associativité des puissances d'une même matrice, sans nouveau calcul ligne-colonne :

$$JK = J^4 = I, \quad KJ = J^4 = I,$$

$$KL = J^5 = J, \quad LK = J^5 = J,$$

$$JL = J^3 = K, \quad LJ = J^3 = K.$$

Ces six produits appartiennent donc à E .

- c. Le produit de deux éléments quelconques de E est une combinaison linéaire des produits entre I, J, K et L , par distributivité du produit matriciel. Les produits avec I restent dans la famille ; les autres produits ont été calculés aux questions 2.a et 2.b et appartiennent tous à E .

Pour rendre la conclusion explicite, si $M = aI + bJ + cK + dL$ et $N = a'I + b'J + c'K + d'L$, alors :

$$\begin{aligned} MN &= (aa' + bc' + cb' + dd')I + (ab' + ba' + cd' + dc')J + (ac' + ca' + bd' + db')K \\ &\quad + (ad' + da' + bb' + cc')L. \end{aligned}$$

Cette expression appartient à E , qui est donc stable par produit.

3) a. Méthode 1 — Symétrie réelle.

La matrice L est réelle et vérifie ${}^tL = L$, comme on le lit sur ses coefficients. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, résultat admis au programme. Ainsi L est diagonalisable.

Méthode 2 — Construction d'une base de vecteurs propres.

Avec (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique, le produit par L échange e_1 et e_3 , ainsi que e_2 et e_4 . Donc $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$ sont des vecteurs propres de valeur propre 1 ; $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_4$ sont des vecteurs propres de valeur propre -1 .

Pour tout $V = {}^t(a, b, c, d)$, on dispose de la décomposition :

$$V = \frac{a+c}{2}(e_1 + e_3) + \frac{b+d}{2}(e_2 + e_4) + \frac{a-c}{2}(e_1 - e_3) + \frac{b-d}{2}(e_2 - e_4).$$

Les quatre vecteurs engendrent donc l'espace de dimension 4 ; ils en forment une base. C'est une base de vecteurs propres de L , donc L est diagonalisable. La première méthode est immédiate grâce au théorème ; la seconde construit concrètement les directions propres.

b. Puisque $L^2 = I$, si $V \neq 0$ et $LV = \mu V$, alors $V = L^2V = \mu^2V$. Ainsi $\mu^2 = 1$ et les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 .

Pour $V = {}^t(a, b, c, d)$, $LV = {}^t(c, d, a, b)$. L'équation $LV = V$ équivaut à $c = a$ et $d = b$, d'où :

$$E_1(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De même, $LV = -V$ équivaut à $c = -a$ et $d = -b$, donc :

$$E_{-1}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Chacun de ces sous-espaces contient un vecteur non nul ; les deux valeurs possibles sont donc effectivement des valeurs propres. Chaque famille affichée est libre, comme le montrent ses deux premières coordonnées, et chacun des deux sous-espaces est de dimension 2. Finalement $\text{Sp}(L) = \{-1, 1\}$.

- 4) a. Supposons $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$. En écrivant les quatre coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0, \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0. \end{cases}$$

En additionnant les équations, on obtient $4a_1 = 0$. En prenant successivement les combinaisons « première moins deuxième plus troisième moins quatrième », « première plus deuxième moins troisième moins quatrième » et « première moins deuxième moins troisième plus quatrième », on obtient $4a_2 = 0$, $4a_3 = 0$ et $4a_4 = 0$.

Ainsi tous les coefficients sont nuls. La famille est libre ; elle a quatre éléments dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, de dimension 4, donc c'est une base.

- b. Pour $V = {}^t(a, b, c, d)$, les produits s'écrivent :

$$LV = \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad (J + K)V = \begin{pmatrix} b + d \\ a + c \\ b + d \\ a + c \end{pmatrix}.$$

L'application aux quatre vecteurs donne :

Vecteur	Image par L	Image par $J + K$
u_1	u_1	$2u_1$
u_2	u_2	$-2u_2$
u_3	$-u_3$	0
u_4	$-u_4$	0

Par exemple, pour u_3 , $b + d = 1 - 1 = 0$ et $a + c = 1 - 1 = 0$, d'où $(J + K)u_3 = 0$. Les autres lignes suivent des mêmes formules en remplaçant les quatre coordonnées. Tous les u_i sont non nuls. Ils sont donc bien des vecteurs propres des deux matrices, y compris u_3 et u_4 pour la valeur propre 0 de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire

Question adaptée au programme actuel : le domaine du paramètre est rectifié en $0 < p \leq 1/2$. Le domaine original $]0, 1[$ autorisait $1 - 2p < 0$, impossible pour une probabilité. Le cas $p = 1/2$ est conservé : le pion se déplace alors vers chacun de ses deux voisins avec probabilité $1/2$, et jamais en diagonale. La précision « chacun des deux sommets voisins » explicite le protocole.

- 1) a. Question adaptée au programme actuel : les coefficients sont définis par les transitions du protocole pour tout sommet de départ. On les identifie à des

probabilités conditionnelles seulement si l'événement conditionnant a une probabilité strictement positive ; à l'instant initial notamment, trois états ont une probabilité nulle.

Depuis le sommet 1, les probabilités vers les sommets 1, 2, 3, 4 sont respectivement 0, p , $1 - 2p$, p . Elles donnent la première colonne. Les autres colonnes se déduisent des voisinages explicités dans l'énoncé. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1 - 2p & p \\ p & 0 & p & 1 - 2p \\ 1 - 2p & p & 0 & p \\ p & 1 - 2p & p & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous ses coefficients sont positifs ou nuls, puisque $0 < p \leq 1/2$, et chaque colonne est de somme $2p + (1 - 2p) = 1$.

L'annale adopte des colonnes de probabilités. Avec la convention du programme où les lignes correspondent au sommet de départ, la matrice de transition serait $M = {}^tA$ et l'état serait une ligne $V_n = {}^t(C_n)$. On a donc $V_{n+1} = V_n M$, équivalent à $C_{n+1} = AC_n$. Ici A est symétrique, donc $M = A$, mais les rôles des indices restent explicités par ces conventions.

b. La matrice $J + K$ vaut :

$$J + K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients égaux à 1 relient les sommets voisins, tandis que ceux de L relient les

sommets opposés. La comparaison avec A donne :

$$A = p(J + K) + (1 - 2p)L.$$

2) a. On utilise les actions simultanées obtenues dans la partie 1.4.b. Par linéarité :

$$Au_1 = (2p + (1 - 2p))u_1 = u_1,$$

$$Au_2 = (-2p + (1 - 2p))u_2 = (1 - 4p)u_2,$$

$$Au_3 = -(1 - 2p)u_3 = (2p - 1)u_3, \quad Au_4 = (2p - 1)u_4.$$

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p - 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont u_1, u_2, u_3, u_4 , qui forment une base d'après la partie 1.4.a ; P est donc inversible. Les quatre égalités précédentes donnent $AP = PD$, puis $A = PDP^{-1}$.

Cette diagonalisation reste valable si certaines valeurs propres coïncident ou sont nulles, car l'inversibilité de P a été prouvée indépendamment de p . En particulier, pour $p = 1/3$, les trois dernières valeurs propres valent $-1/3$; cela ne change pas la base construite.

- b. Les lignes de P coïncident avec ses colonnes. Le produit d'une ligne avec la colonne de même numéro est la somme de quatre carrés égaux à 1, donc vaut 4. Pour deux numéros distincts, les quatre produits comportent deux 1 et deux -1 , donc leur somme est 0. Explicitement :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

Par conséquent $P(P/4) = (P/4)P = I$, ce qui confirme l'inversibilité et donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}P.$$

- 3) a. Notons a_{ij} la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i . Les événements $\{X_n = j\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, forment un système complet. Pour tout i , les probabilités totales donnent :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^4 P(X_{n+1} = i, X_n = j) = \sum_{j=1}^4 a_{ij}P(X_n = j).$$

Si $P(X_n = j) > 0$, l'égalité de chaque terme provient de la formule des probabilités composées et du protocole. Si $P(X_n = j) = 0$, l'intersection a une probabilité nulle et le produit $a_{ij}P(X_n = j)$ vaut également 0, sans calculer de probabilité conditionnelle sur cet événement.

Le dernier membre est la i -ième coordonnée de AC_n . L'égalité étant vraie pour les quatre coordonnées, $C_{n+1} = AC_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Méthode 1 — Diagonalisation, comme demandé.

La relation précédente donne par récurrence $C_n = A^n C_0$, où $C_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$ puisque le départ est au sommet 1. Comme $A = PDP^{-1}$, l'associativité et les simplifications $P^{-1}P = I$ donnent $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 0$. En utilisant $P^{-1} = P/4$:

$$C_n = \frac{1}{4}PD^nPC_0.$$

Posons $r = 1 - 4p$ et $s = 2p - 1$. Pour $n \geq 1$, les puissances de la matrice diagonale sont définies même si r ou s est nul. Comme $PC_0 = {}^t(1, 1, 1, 1)$, on a :

$$D^n PC_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r^n \\ s^n \\ s^n \end{pmatrix}, \quad C_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + r^n + 2s^n \\ 1 - r^n \\ 1 + r^n - 2s^n \\ 1 - r^n \end{pmatrix}.$$

La loi cherchée est donc :

$$P(X_n = 1) = \frac{1 + (1 - 4p)^n + 2(2p - 1)^n}{4},$$

$$P(X_n = 2) = P(X_n = 4) = \frac{1 - (1 - 4p)^n}{4},$$

$$P(X_n = 3) = \frac{1 + (1 - 4p)^n - 2(2p - 1)^n}{4}.$$

La somme des quatre expressions vaut 1. Leur positivité découle aussi de $C_n = A^n C_0$: la matrice A a des coefficients positifs ou nuls et préserve la somme des coordonnées. Au rang 1, elles donnent ${}^t(0, p, 1 - 2p, p)$, conforme au protocole.

Méthode 2 — Récurrences sur des groupes de sommets.

Cette méthode retrouve la loi sans calcul de puissance de matrice. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, notons $c_{i,n} = P(X_n = i)$ et posons $a_n = c_{1,n} + c_{3,n}$, la probabilité d'être sur un sommet impair. L'autre groupe a la probabilité $1 - a_n$.

Depuis un sommet impair, le déplacement diagonal reste dans ce groupe avec probabilité $1 - 2p$; depuis un sommet pair, les deux déplacements voisins atteignent ce groupe avec probabilité totale $2p$. Les probabilités totales donnent :

$$a_{n+1} = (1 - 2p)a_n + 2p(1 - a_n) = 2p + (1 - 4p)a_n.$$

En soustrayant $1/2$, on obtient $a_{n+1} - 1/2 = r(a_n - 1/2)$. Comme $a_0 = 1$, la suite est arithmético-géométrique et $a_n = (1 + r^n)/2$.

D'autre part, les récurrences sur les coordonnées issues de 3.a sont :

$$c_{1,n+1} = p(c_{2,n} + c_{4,n}) + (1 - 2p)c_{3,n},$$

$$c_{3,n+1} = p(c_{2,n} + c_{4,n}) + (1 - 2p)c_{1,n}.$$

Par soustraction, $d_n = c_{1,n} - c_{3,n}$ vérifie $d_{n+1} = s d_n$ et $d_0 = 1$, donc $d_n = s^n$. De même, en soustrayant les récurrences des sommets 2 et 4, $c_{2,n+1} - c_{4,n+1} = s(c_{2,n} - c_{4,n})$; la différence initiale étant nulle, $c_{2,n} = c_{4,n}$ pour tout n .

En résolvant les sommes et différences, pour $n \geq 1$:

$$c_{1,n} = \frac{a_n + d_n}{2} = \frac{1 + r^n + 2s^n}{4}, \quad c_{3,n} = \frac{a_n - d_n}{2} = \frac{1 + r^n - 2s^n}{4},$$

$$c_{2,n} = c_{4,n} = \frac{1 - a_n}{2} = \frac{1 - r^n}{4}.$$

On retrouve exactement la même loi. La diagonalisation donne une méthode réutilisable pour les puissances ; les regroupements probabilistes expliquent les deux facteurs géométriques r et s .

Cas particuliers. Si $p = 1/4$, alors $r = 0$ et $s = -1/2$: pour $n \geq 1$, $c_{2,n} = c_{4,n} = 1/4$ et $c_{1,n} = (1 + 2(-1/2)^n)/4$, $c_{3,n} = (1 - 2(-1/2)^n)/4$. Aucune division par une valeur propre n'est utilisée.

Si $p = 1/2$, alors $r = -1$ et $s = 0$. Pour $n \geq 1$ impair, la loi est $(0, 1/2, 0, 1/2)$; pour $n \geq 2$ pair, elle est $(1/2, 0, 1/2, 0)$. Le rang 0 est traité séparément par $C_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$; on n'a donc pas à interpréter une expression 0^0 . Ces cas vérifient les formules et montrent pourquoi la borne $p = 1/2$ peut être conservée.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule et 2.a : choix explicite de la réalisation $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ pour déterminer exactement $Z(\Omega)$; la loi exponentielle, seule, ne fixe pas l'image d'une variable sur les événements de probabilité nulle. Aucun calcul probabiliste n'est modifié.
- Exercice 2, préambule et 3.b : indépendance des lancers explicitée et maximalité à gauche ajoutée à la définition des chaînes, afin de rendre la définition cohérente avec l'exemple et les probabilités imposées.
- Exercice 2, 2 et 3 : conditions respectives $n \geq 2$ et $n \geq 3$ explicitées pour que Y_{n-1} soit défini et que l'ensemble de choix de k ne soit pas vide.
- Problème, partie 2, préambule : domaine $]0, 1[$ rectifié en $]0, 1/2]$ afin que les probabilités soient positives ou nulles ; la probabilité p est attribuée explicitement à chacun des deux voisins. Le cas limite valide $p = 1/2$ est conservé.

- Problème, partie 2, 1.a et 3.a : coefficients définis comme probabilités de transition du protocole, avec identification aux probabilités conditionnelles lorsque l'état de départ a une probabilité non nulle ; convention en colonnes conservée et transposition vers la convention en lignes explicitée dans le corrigé.