



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Question adaptée au programme actuel : le préambule prend $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à la base donnée, afin de travailler sur un espace concret. Tous les calculs et toutes les questions sont conservés.

1) a. Les colonnes sont les coordonnées des images des vecteurs de la base :

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont égales au vecteur $U = {}^t(a, 1, -a)$ et la colonne 2 est nulle. Or $A_a U = aU - aU = 0$. Le produit de A_a par chacune de ses colonnes est donc nul, d'où $A_a^2 = 0$.

b. Si $A_a V = \lambda V$ avec $V \neq 0$, alors $0 = A_a^2 V = \lambda^2 V$, donc $\lambda = 0$. Réciproquement, ${}^t(A_a(0, 1, 0)) = 0$ avec un vecteur non nul. Ainsi le spectre réel est exactement $\{0\}$.

c. Si A_a était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont ses valeurs propres, donc à la matrice nulle. Elle serait alors nulle, ce qui contredit son coefficient $(2, 1)$ égal à 1. Elle n'est donc pas diagonalisable.

La colonne 2 est nulle et ${}^t(0, 1, 0)$ appartient à son noyau. Elle n'est pas inversible.

2) a. Méthode 1 — Liberté et dimension.

Supposons $\alpha u_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Dans la base $\mathcal{B}$, cela donne $a\alpha = 0$, $\alpha + \beta = 0$ et $-a\alpha + \gamma = 0$. Comme $a \neq 0$, successivement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est libre ; elle comporte trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base.

Méthode 2 — Décomposition explicite.

Pour tout $v = re_1 + se_2 + te_3$, la relation définissant u_1 donne $e_1 = \frac{1}{a}u_1 - \frac{1}{a}e_2 + e_3$.
Ainsi :

$$v = \frac{r}{a}u_1 + \left(s - \frac{r}{a}\right)e_2 + (t + r)e_3.$$

La famille engendre donc E et possède trois vecteurs, autant que sa dimension : c'est une base. La première méthode teste l'absence de relation ; la seconde fournit directement les coordonnées dans la nouvelle base.

b. La linéarité et les données donnent :

$$f_a(u_1) = af_a(e_1) + f_a(e_2) - af_a(e_3) = 0, \quad f_a(e_2) = 0, \quad f_a(e_3) = u_1.$$

Les colonnes correspondantes dans $\mathcal{B}'$ sont donc ${}^t(0, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 0)$ et ${}^t(1, 0, 0)$. La matrice

est bien $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) a. La matrice d'une composée dans une même base est le produit des matrices. Ainsi $g \circ g = f_a$ donne $M^2 = K$. Par associativité, $MK = MM^2 = M^3 = M^2M = KM$.

b. Écrivons $M = \begin{pmatrix} b & x & y \\ d & c & z \\ h & j & q \end{pmatrix}$. Alors :

$$MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad KM = \begin{pmatrix} h & j & q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité entraîne $h = j = d = 0$ et $q = b$, donc $M = \begin{pmatrix} b & x & y \\ 0 & c & z \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Son carré vaut :

$$M^2 = \begin{pmatrix} b^2 & x(b+c) & 2by+xz \\ 0 & c^2 & z(b+c) \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $M^2 = K$, on a $b^2 = c^2 = 0$. Les coefficients étant réels, $b = c = 0$, puis l'entrée (1, 3) impose $xz = 1$. On obtient exactement la forme annoncée ; y est libre et x, z sont non nuls.

4) Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le produit direct donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $xz = 1$, alors

$M^2 = K$ et l'endomorphisme associé vérifie $g \circ g = f_a$.

Les solutions sont donc exactement les endomorphismes de matrice $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1/x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans

$\mathcal{B}'$, où $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

- 1) a. Pour une issue quelconque des n épreuves, chaque X_i ajoute 1 si et seulement si le résultat R_i manque. Leur somme compte donc exactement les résultats manquants : $X = X_1 + X_2 + X_3$. Cette identité est vraie pour chaque issue.
- b. Fixons $i \in \{1, 2, 3\}$. À chaque épreuve, la probabilité de ne pas obtenir R_i est $1 - P_i$. L'indépendance des épreuves donne $P(X_i = 1) = (1 - P_i)^n$. Ainsi :

$$X_i \sim \mathcal{B}((1 - P_i)^n), \quad P(X_i = 0) = 1 - (1 - P_i)^n.$$

- c. Les variables sont bornées, donc admettent des espérances. La linéarité, qui ne requiert pas leur indépendance, donne :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 E(X_i) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n.$$

- 2) a. Puisque $P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - x - y$, on a $1 - P_3 = x + y$, donc $E(X) = f(x, y)$. Les probabilités admissibles vérifient $x > 0, y > 0$ et $x + y < 1$. Le domaine probabiliste est donc inclus dans l'ouvert carré où f est définie. Le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ appartient bien au domaine admissible et donne $P_3 = \frac{1}{3}$.
- b. Comme n est un entier, f est une fonction polynomiale de deux variables, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, en particulier sur l'ouvert $]0, 1[^2$.

- 3) a. La dérivation de chaque terme donne :

$$\partial_1 f(x, y) = n((x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1}),$$

$$\partial_2 f(x, y) = n((x + y)^{n-1} - (1 - y)^{n-1}).$$

Ces deux expressions sont les composantes du gradient $\nabla f(x, y)$.

b. Sur le carré considéré, les nombres $x + y$, $1 - x$ et $1 - y$ sont strictement positifs.

Comme $n - 1 \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Le gradient s'annule si et seulement si :

$$x + y = 1 - x \quad \text{et} \quad x + y = 1 - y.$$

La soustraction donne $x = y$, puis $3x = 1$. Réciproquement, le couple $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ vérifie ces égalités. C'est l'unique point critique dans le carré.

4) a. Méthode 1 — Hessienne et valeurs propres.

Les dérivées secondes sont :

$$\partial_{1,1}^2 f = n(n-1)((1-x)^{n-2} + (x+y)^{n-2}),$$

$$\partial_{2,2}^2 f = n(n-1)((1-y)^{n-2} + (x+y)^{n-2}),$$

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f = n(n-1)(x+y)^{n-2}.$$

Posons $c_n = n(n-1)(2/3)^{n-2} > 0$. Au point critique $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, la hessienne vaut

$H = c_n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les vecteurs ${}^t(1, 1)$ et ${}^t(1, -1)$ sont respectivement des vecteurs propres

de valeurs propres $3c_n$ et c_n . Ils sont indépendants, donc ces deux valeurs propres décrivent toute la matrice.

Elles sont strictement positives, y compris pour $n = 2$ où $c_n = 2$. La fonction est C^2 sur un ouvert contenant p et son gradient s'y annule. Le critère de la hessienne donne donc un minimum local strict en p . Comme p correspond à trois probabilités strictement positives, c'est aussi un minimum local de l'espérance dans le modèle.

Méthode 2 — Inégalité des tangentes en une variable.

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $h(t) = t^n$ est strictement convexe puisque $h''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$. L'inégalité de la tangente en $t_0 = 2/3$ donne, pour tout $t > 0$:

$$t^n \geq (2/3)^n + n(2/3)^{n-1}(t - 2/3),$$

avec égalité seulement pour $t = 2/3$. Pour justifier cette stricte égalité, la différence entre les deux membres a une dérivée $n(t^{n-1} - (2/3)^{n-1})$ strictement négative avant $2/3$ et strictement positive après.

Appliquons l'inégalité aux trois nombres $1 - x$, $1 - y$ et $x + y$, de somme 2. En additionnant, les termes linéaires s'annulent et $f(x, y) \geq 3(2/3)^n$. L'égalité exige que les trois nombres valent $2/3$, donc que $x = y = 1/3$.

Cette seconde méthode établit même un minimum global strict sur le carré ; la première est la méthode locale générale demandée par le programme pour étudier un point critique.

b. Pour $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}$, on obtient $E(X) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 3

- 1) Pour tout réel x , $f(x) \geq 0$. La fonction est continue sur chaque demi-droite et aussi en 0, car $xe^{-x^2/2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$; elle a donc des limites finies de chaque côté en tout point.

Pour $A \geq 0$, la reconnaissance d'une primitive donne :

$$\int_0^A xe^{-x^2/2} dx = \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2}.$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, cette expression tend vers 1. Comme f est nulle sur $] -\infty, 0[$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. La fonction f est donc une densité de probabilité.

- 2) a. Pour $x < 0$, $F(x) = 0$. Pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x te^{-t^2/2} dt = 1 - e^{-x^2/2}$. Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, vaut 0 en 0 et tend vers 1 en $+\infty$.

- b. Puisque $F = 0$ sur $] -\infty, 0[$, toute médiane doit être strictement positive. Sur $]0, +\infty[$, $F'(x) = f(x) > 0$; F y est donc strictement croissante. L'équation $F(\mu) = 1/2$ s'écrit :

$$e^{-\mu^2/2} = \frac{1}{2} \iff \mu^2 = 2 \ln 2.$$

L'unique solution positive, donc l'unique médiane, est $\mu = \sqrt{2 \ln 2}$.

- 3) Sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$. La dérivée est strictement positive pour $0 < x < 1$, nulle en 1 et strictement négative pour $x > 1$. La densité croît donc

strictement de 0 à 1, puis décroît strictement. Sur les réels négatifs, elle vaut 0, tandis que $f(1) = e^{-1/2} > 0$. Son maximum global est ainsi atteint uniquement en 1 : $M_o = 1$.

4) a. Méthode 1 — Moment d'une normale centrée réduite.

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, de densité $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$. On connaît $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$, donc son moment d'ordre 2 est fini et vaut $E(Z^2) = 1$. Par transfert :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

L'intégrande est positive et paire, donc son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut $\sqrt{2\pi}/2$. Or $|x|f(x) = x^2 e^{-x^2/2}$ pour $x \geq 0$ et vaut 0 pour $x < 0$. L'intégrale définissant l'espérance est donc absolument convergente et $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Méthode 2 — Intégration par parties et normalisation de la normale.

Sur le segment $[0, A]$, les fonctions utilisées étant C^1 , on peut écrire :

$$\int_0^A t^2 e^{-t^2/2} dt = -Ae^{-A^2/2} + \int_0^A e^{-t^2/2} dt.$$

En effet, on prend $u(t) = t$ et $v'(t) = te^{-t^2/2}$, donc $v(t) = -e^{-t^2/2}$. Les croissances comparées donnent $Ae^{-A^2/2} \rightarrow 0$. La densité normale est normalisée et paire, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}/2$. En passant à la limite dans l'égalité sur segment, on établit à la fois la convergence de l'intégrale positive et la valeur de $E(X)$.

La première méthode utilise le second moment normal déjà connu ; la seconde ramène ce calcul à la seule intégrale de la densité normale.

- b. Calculons le moment d'ordre 2 avant d'utiliser la variance. Pour $A > 0$, une intégration par parties sur $[0, A]$, avec $u(t) = t^2$ et $v'(t) = te^{-t^2/2}$, donne :

$$\int_0^A t^3 e^{-t^2/2} dt = -A^2 e^{-A^2/2} + 2 \int_0^A t e^{-t^2/2} dt = -A^2 e^{-A^2/2} + 2(1 - e^{-A^2/2}).$$

Les croissances comparées donnent $A^2 e^{-A^2/2} \rightarrow 0$. L'intégrale positive converge donc vers 2. Par transfert, X^2 admet une espérance, égale à 2. La variance existe et la formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Problème

Partie 1

- 1) Fixons $k \geq 1$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $t \leq k+1$ et $t > 0$, donc $1/t \geq 1/(k+1)$. Les fonctions sont continues sur ce segment. Par positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

- 2) Pour $n = 1$, $v_1 = 1 = \ln 1 + 1$. Pour $n \geq 2$, additionnons les inégalités précédentes pour $k = 1, \dots, n-1$:

$$v_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Ainsi $v_n \leq 1 + \ln n$ pour tout $n \geq 1$.

Partie 2

1) a. Initialement, $u_0 = 1$ est bien défini et strictement positif. Supposons u_n défini et strictement positif. Alors $1/u_n$ existe et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n > 0$; le terme suivant est donc lui aussi défini et strictement positif. Par récurrence, cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1/u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2) a. Comme $u_k \neq 0$, on peut développer le carré de la relation de récurrence :

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}.$$

b. Additionnons les identités pour $k = 0, \dots, n-1$. La somme de gauche est télescopique :

$$u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

Comme $u_0^2 = 1$, on obtient

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

pour tout $n \geq 1$.

c. Tous les termes de la somme précédente sont positifs, donc $u_n^2 \geq 2n + 1$. Puisque $u_n > 0$, $u_n \geq \sqrt{2n + 1}$. Cette borne tend vers $+\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.

3) a. Séparons le terme d'indice 0, qui vaut 1 :

$$u_n^2 = 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

Pour $k \geq 1$, $u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k > 0$, donc $1/u_k^2 \leq 1/(2k)$. En sommant, pour $n \geq 2$:

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

b. Comme $n - 1 \geq 1$, la partie 1 donne $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n - 1)$. En l'insérant dans la majoration précédente :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} (1 + \ln(n - 1)) = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n - 1)}{2}.$$

c. Pour $n \geq 2$, les deux bornes établies donnent :

$$1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n - 1)}{4n}.$$

Les croissances comparées assurent que $\ln(n - 1)/n \rightarrow 0$; par exemple, $0 \leq \ln(n - 1)/n \leq \ln n/n \rightarrow 0$. Par encadrement, $u_n^2/(2n) \rightarrow 1$. La racine carrée est continue en 1 et les termes sont positifs, donc :

$$\frac{u_n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{u_n^2}{2n}} \rightarrow 1.$$

Ainsi $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Partie 3

1) Code adapté en Python. Le programme suivant ne nécessite aucun import :

Python

```
n = int(input("Entrer un entier naturel n : "))
u = 1.0
for k in range(n):
    u = u + 1.0 / u
print(u)
```

On suppose, comme dans l'énoncé, que l'entrée est un entier naturel. Avant la boucle, u représente u_0 . Après j passages, u représente numériquement u_j . La boucle comporte exactement n passages et affiche donc une approximation de u_n . Pour $n = 0$, elle est vide et le programme affiche 1,0, conformément à $u_0 = 1$.

Le programme complet a été exécuté avec les entrées 0, 1, 2 et 5000. Les sorties arrondies à douze décimales sont respectivement 1,000000000000, 2,000000000000, 2,500000000000 et 100,029905593257. Les opérations flottantes approchent les termes réels ; la récurrence mathématique justifie l'algorithme.

2) a. Code adapté en Python. Aucun import n'est nécessaire :

Python

```
n = 0
u = 1.0
while u < 100.0:
    u = u + 1.0 / u
    n = n + 1
print(n)
```

Au début de chaque test, u représente numériquement u_n . La suite tend vers $+\infty$, donc la boucle mathématique finit par atteindre un terme au moins égal à 100. Elle visite les indices dans l'ordre et s'arrête au premier terme satisfaisant cette condition ; n est donc l'indice recherché.

Le programme complet a été exécuté et affiche 4998. Une exécution de contrôle des termes voisins donne $u_{4997} \simeq 99,999908565235$ et $u_{4998} \simeq 100,009908574379$. Ces valeurs sont des résultats numériques ; l'encadrement demandé ensuite sera démontré sans simulation.

b. Comme $5000 = 2^3 \times 5^4$, les propriétés du logarithme donnent :

$$\ln 5000 = 3 \ln 2 + 4 \ln 5 \leq 3 \times 0,70 + 4 \times 1,61 = 8,54.$$

Le nombre 8,54 est donc un majorant de $\ln 5000$.

c. Notons N le plus petit entier tel que $u_N \geq 100$. Son existence résulte de la divergence vers $+\infty$ et $N \geq 1$ puisque $u_0 = 1$.

D'une part, $u_{5000}^2 \geq 10001 > 10000$. Comme $u_{5000} > 0$, $u_{5000} > 100$, donc $N \leq 5000$.

D'autre part, la majoration de la partie 2 en $n = 4994$ et la croissance du logarithme donnent :

$$u_{4994}^2 \leq 9988 + \frac{5}{2} + \frac{\ln 4993}{2} \leq 9988 + 2,5 + \frac{8,54}{2} = 9994,77 < 10000.$$

Ainsi $u_{4994} < 100$. Puisque la suite est croissante, aucun indice inférieur ou égal à 4994 ne convient, et $N \geq 4995$. Finalement $4995 \leq N \leq 5000$, conformément à la demande.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule et questions 1) à 4) : choix de l'espace concret $E = \mathbb{R}^3$, en conservant la base et toutes les données. Ce choix respecte le cadre des espaces concrets du programme et ne change aucun calcul.

- Problème, partie 3, 1) et 2) a. : Code adapté en Python. Les demandes initiales de programmes en ancien langage sont remplacées par des demandes en Python, avec le même calcul et le même test d'arrêt. La syntaxe utile de saisie, de conversion, d'affichage et de range est documentée dans le sujet ; aucune bibliothèque n'intervient.