



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

1) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction f par : $\forall x \in D, f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) .

2) a. Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D .

b. En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α .

c. Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

3) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

b. En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Donner la position relative de (Δ) et (C) .

4) Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T) .

On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

5) Soit λ un réel ; on note g_λ la fonction définie par :

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha, \\ \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

- a.** On pose $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .
- b.** Donner la fonction de répartition G_λ de X .

Exercice 2

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

- 1) a.** Montrer que E est un espace vectoriel.
- b.** Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ **une matrice de** E .

- a.** Montrer que : $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E .
- b.** Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.
- c.** Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

3) On considère l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F .

b. Les matrices de F sont-elles diagonalisables?

c. Dans cette question, on appelle U la matrice de F telle que : $x = 3, y = 2$ et $z = 4$.

Trouver les valeurs propres de U et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4) On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui, à toute matrice A de F , associe le nombre

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j},$$

où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne.

a. Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer $\text{Im } \varphi$. En déduire que $\text{Ker } \varphi$ est de dimension 2.

c. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\text{Ker } \varphi$.

Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\text{Ker } \varphi$.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1) a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .

b. Calculer u_1 et u_2 .

c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

2) a. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n) .

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Donner enfin la valeur de ℓ .

4) Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Problème

On lance indéfiniment une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on dit que le k -ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)$ -ième lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient Pile (resp. Face) au k -ième lancer ».

Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples

1) Donner la loi de X_2 .

2) a. Donner la loi de X_3 .

b. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

3) a. Trouver la loi de X_4 .

b. Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p , q et n .

2) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que
$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q - p}(q^{n-1} - p^{n-1}).$$

3) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n - 1)$ en fonction de p et q .

- 4) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4 .
- 5) Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k -ième lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernoulli).

Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$

- 1) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.