



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) Comme $e^{-x} > 0$, l'inégalité $e^x - e^{-x} > 0$ équivaut à $e^{2x} > 1$, donc à $2x > 0$, par stricte croissance de l'exponentielle. Ainsi $D =]0, +\infty[$. Sur ce domaine, $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ est bien définie.

2) a. La fonction $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est strictement positive et de classe C^∞ sur D . Par composition, f est de classe C^∞ sur D et

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur D . Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $e^x - e^{-x} \rightarrow 0^+$, d'où $f(x) \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^x - e^{-x} \rightarrow +\infty$, d'où $f(x) \rightarrow +\infty$.

Son tableau de variations se résume ainsi : sur $]0, +\infty[$, f croît strictement de $-\infty$ vers $+\infty$.

b. Méthode 1 — Bijection puis résolution algébrique.

D'après la continuité, la stricte croissance et les limites précédentes, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Cette égalité équivaut à $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$. Posons $t = e^\alpha > 1$. En multipliant par $t > 0$, nous obtenons $t^2 - t - 1 = 0$. Les racines sont $(1 + \sqrt{5})/2$ et $(1 - \sqrt{5})/2$; seule la première est strictement positive. Par conséquent,

$$\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Méthode 2 — Résolution directe de l'équation.

Pour tout $x > 0$, les équivalences $f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 1 \iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$ sont réversibles. La seule racine positive du trinôme est $t = (1 + \sqrt{5})/2 > 1$.

L'exponentielle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$: il existe donc exactement un

$x > 0$ ayant cette exponentielle, à savoir $x = \ln t$. On retrouve existence, unicité et la même expression de α .

La première méthode utilise l'étude globale de f ; la seconde convient lorsqu'une substitution transforme directement l'équation en un trinôme.

c. Le coefficient directeur demandé est $f'(\alpha)$. Le dénominateur $e^\alpha - e^{-\alpha}$ vaut 1. De plus,

$$(e^\alpha + e^{-\alpha})^2 = (e^\alpha - e^{-\alpha})^2 + 4 = 5.$$

Comme $e^\alpha + e^{-\alpha} > 0$, il vaut $\sqrt{5}$. Ainsi $f'(\alpha) = \sqrt{5}$ et la tangente en $(\alpha, 0)$ a pour équation $T : y = \sqrt{5}(x - \alpha)$.

3) a. Pour $x > 0$, la factorisation $e^x - e^{-x} = e^x(1 - e^{-2x})$ donne

$$f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x}).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1 - e^{-2x} \rightarrow 1$ et le logarithme est continu en 1. La limite cherchée est donc 0.

b. Par définition d'une asymptote affine, la limite précédente montre que $\Delta : y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Pour tout $x > 0$, $0 < 1 - e^{-2x} < 1$, donc $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x}) < 0$. La courbe (C) est strictement au-dessous de Δ sur tout son domaine.

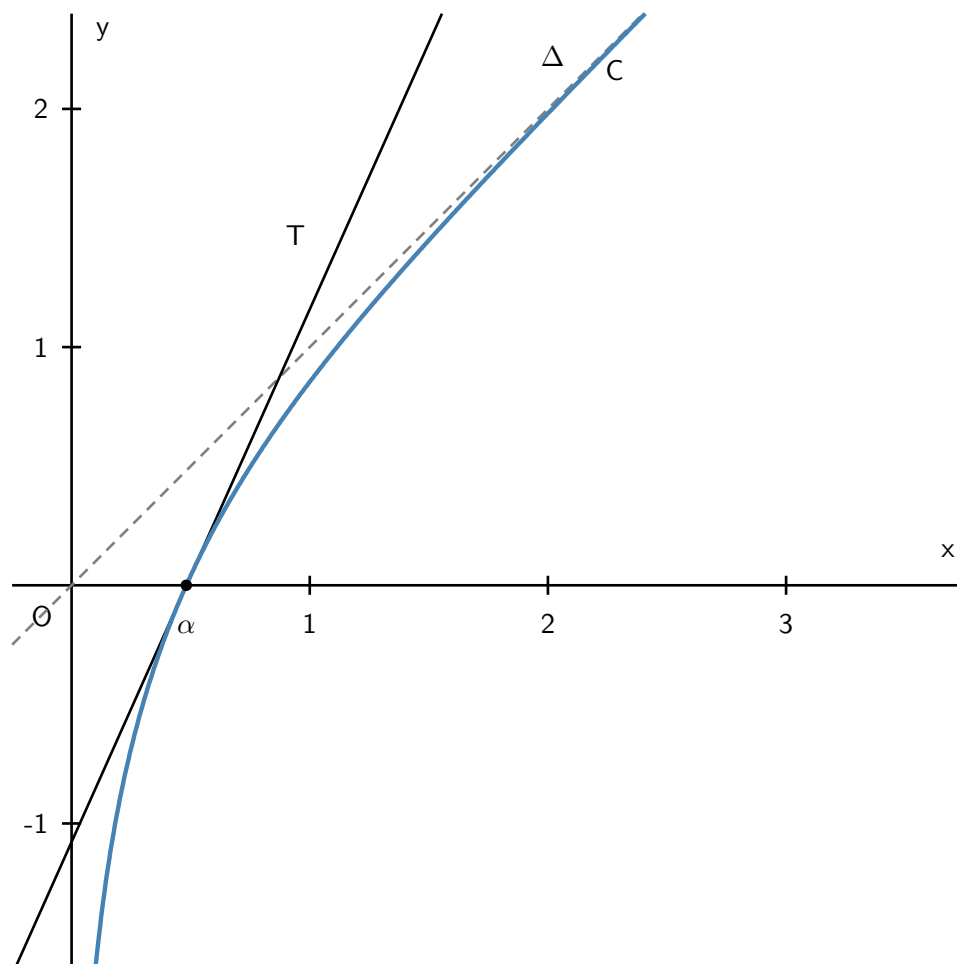
4) On trace une courbe strictement croissante, allant vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, coupant l'axe des abscisses en $(\alpha, 0)$, et s'approchant de $y = x$ par-dessous lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'axe $x = 0$ est une asymptote verticale.

Pour préciser l'allure, la dérivation de $f'(x) = (e^{2x} + 1)/(e^{2x} - 1)$ donne

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - 2e^{2x}(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} - 1)^2} = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} < 0.$$

La courbe est donc concave, au-dessous de sa tangente T . La figure suivante utilise la

valeur exacte de α et les équations exactes de f , T et Δ pour calculer les points tracés.
Les deux axes ont la même unité graphique.



$$C : y = \ln(e^x - e^{-x})$$

$$\Delta : y = x$$

$$T : y = \sqrt{5}(x - \alpha), \quad \alpha = \ln((1 + \sqrt{5})/2)$$

5) a. On suit l'indication : avec $h(x) = f(x) - x$,

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{e^{2x} - 1}.$$

Sur $[\alpha, +\infty[$, le dénominateur est strictement positif. Pour $b \geq \alpha$, la fonction h est de classe C^1 sur $[\alpha, b]$ et

$$\int_{\alpha}^b \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} dx = \frac{\lambda}{2}(h(b) - h(\alpha)).$$

Or $h(b) \rightarrow 0$ lorsque $b \rightarrow +\infty$, et $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$. L'intégrale généralisée converge et vaut $\lambda\alpha/2$.

La fonction g_λ est positive ou nulle exactement lorsque $\lambda \geq 0$. Elle est continue de chaque côté de α et admet des limites latérales finies en ce point, car $\alpha > 0$. Elle est donc une densité si et seulement si son intégrale vaut 1, ce qui impose

$$\lambda = \frac{2}{\alpha} > 0.$$

Cette valeur vérifie toutes les conditions de la caractérisation d'une densité ; elle est l'unique valeur possible.

b. On prend désormais $\lambda = 2/\alpha$. Si $x < \alpha$, $G_\lambda(x) = 0$. Si $x \geq \alpha$, l'intégration sur $[\alpha, x]$ donne

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\alpha}(h(x) - h(\alpha)) = 1 + \frac{f(x) - x}{\alpha}.$$

Ainsi

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha, \\ 1 + \frac{\ln(1 - e^{-2x})}{\alpha} & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

À $x = \alpha$, la seconde expression vaut 0 ; elle est croissante ensuite, puisque sa dérivée est $g_\lambda(x) > 0$ pour $x > \alpha$, et tend vers 1 à l'infini. Les raccordements et les limites sont donc cohérents avec une fonction de répartition.

Exercice 2

1) a. La matrice nulle appartient à E . Si $M, N \in E$ et $s, t \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne

$$(sM + tN)K = sMK + tNK = sM + tN$$

et

$$K(sM + tN) = sKM + tKN = sM + tN.$$

Ainsi $sM + tN \in E$. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel réel.

b. Supposons par l'absurde qu'une matrice $M \in E$ soit inversible. En multipliant $MK = M$ à gauche par M^{-1} , on obtient $K = I_3$. Or le coefficient de K en position $(1, 1)$ vaut 0, contre 1 pour I_3 . Cette contradiction montre qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2) a. Le produit à droite par K échange les première et troisième colonnes ; le produit à gauche échange les première et troisième lignes. Explicitement,

$$MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}, \quad KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

L'égalité $MK = M$ impose $c = a, f = d, k = g$; l'égalité $KM = M$ impose $g = a, h = b, k = c$. En les réunissant, $k = g = c = a, h = b, f = d$.

Réciproquement, toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$ vérifie les deux égalités, comme

le montrent les produits ci-dessus. Par conséquent,

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} : a, b, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

b. Les première et troisième colonnes d'une telle matrice sont égales. Plus

explicitement, le vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $Mv = 0$. Si M était inversible, la

multiplication par M^{-1} donnerait $v = 0$, contradiction. Toutes les matrices de E sont donc non inversibles.

c. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices appartiennent à E et la forme obtenue en a s'écrit de manière unique $M = aA + bB + dC + eD$. L'existence de cette écriture prouve que la famille est génératrice. Son unicité, lue dans les coefficients de positions $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$, prouve qu'elle est libre. Ainsi (A, B, C, D) est une base de E et $\dim E = 4$.

3) a. Posons $H = B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Une matrice de F s'écrit $xA + yH + zD$. Ainsi

$F = \text{Vect}(A, H, D)$ et, puisque les trois matrices sont dans E , F est un sous-espace vectoriel de E .

Si $xA + yH + zD = 0$, les positions $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$ donnent respectivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. La famille (A, H, D) est libre et génératrice de F : c'est une base, et $\dim F = 3$.

b. Toute matrice de F est réelle et symétrique : les coefficients en positions (i, j) et (j, i)

sont égaux. Le résultat du programme selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ s'applique. Toutes les matrices de F sont donc diagonalisables.

c. Ici $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les colonnes extrêmes étant égales, $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $Uv_0 = 0$:

0 est une valeur propre.

Pour trouver les autres vecteurs, on cherche ceux de la forme $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}$. Leur image vaut

$$Uv = \begin{pmatrix} 6a + 2b \\ 4a + 4b \\ 6a + 2b \end{pmatrix}. \text{ Si } v \text{ est propre et non nul, } a = 0 \text{ imposerait } b = 0 \text{ par la première}$$

équation ; donc $a \neq 0$. En posant $r = b/a$, les équations propres deviennent $\lambda = 6 + 2r$ et $\lambda r = 4 + 4r$. Par substitution,

$$r(6 + 2r) = 4 + 4r \iff r^2 + r - 2 = 0 \iff (r - 1)(r + 2) = 0.$$

Pour $r = 1$, on obtient $\lambda = 8$ et $v_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $r = -2$, on obtient $\lambda = 2$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérification directe : $Uv_8 = 8v_8$ et $Uv_2 = 2v_2$.

Les trois vecteurs propres sont associés à trois valeurs propres distinctes, donc sont libres ; dans $\mathbb{R}^3$, ils constituent une base. Dans cette base, U est diagonale avec les coefficients 0, 2, 8. Aucune autre valeur propre n'est possible : l'équation propre dans

cette base aurait tous ses coefficients nuls si la valeur était différente de ces trois nombres. Ainsi $\text{Sp}(U) = \{0, 2, 8\}$, avec les vecteurs propres demandés ci-dessus.

- 4) a. Pour $M, N \in F$ et $s, t \in \mathbb{R}$, le coefficient en position (i, j) de $sM + tN$ est $sm_{i,j} + tn_{i,j}$. La distributivité des sommes finies donne

$$\varphi(sM + tN) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} (sm_{i,j} + tn_{i,j}) = s\varphi(M) + t\varphi(N).$$

La fonction φ est donc une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

- b. La matrice D de la base de F a pour seul coefficient non nul le coefficient central, qui vaut 1. Comme $(-1)^{2+2} = 1$, $\varphi(D) = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tD \in F$ et $\varphi(tD) = t$. Ainsi $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$ et $\text{rg } \varphi = 1$.

Le théorème du rang s'applique à cette application linéaire définie sur F , de dimension finie 3. Il donne $\dim \text{Ker } \varphi = \dim F - \text{rg } \varphi = 3 - 1 = 2$.

- c. Les signes des coefficients dans la définition de φ sont disposés selon les lignes $(+, -, +)$, $(-, +, -)$, $(+, -, +)$. Pour la matrice considérée,

$$\varphi(M) = (2x - y) + (z - 2y) + (2x - y) = 4x - 4y + z.$$

L'appartenance à $\text{Ker } \varphi$ équivaut donc à $z = -4x + 4y$. Avec la base précédente,

$$M = x(A - 4D) + y(H + 4D).$$

$$\text{Les matrices } A - 4D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } H + 4D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont dans } \text{Ker } \varphi,$$

engendrent ce noyau et sont libres, puisque leurs coefficients de positions $(1, 1)$ et $(1, 2)$ permettent de lire respectivement les deux coefficients de combinaison. Elles constituent donc une base de $\text{Ker } \varphi$.

Exercice 3

- 1) a. Pour $n \geq 1$, la fonction polynomiale f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable ; pour $x > 0$,

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + 18x > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $f_n(0) = -4 < 0$ et $f_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure une racine strictement positive ; la stricte croissance assure son unicité. Cette racine est notée u_n .

- b. Pour $n = 1$, l'équation est $9x^2 + x - 4 = 0$. Son discriminant vaut $1 + 144 = 145$, et sa seule racine positive est

$$u_1 = \frac{\sqrt{145} - 1}{18}.$$

Pour $n = 2$, l'équation est $10x^2 - 4 = 0$. Sa racine positive est

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

- c. Méthode 1 — Encadrement de la racine par les signes.

On a $f_n(0) = -4 < 0$ et $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(4/9) - 4 = (2/3)^n > 0$. La stricte croissance de f_n donne $0 < u_n < 2/3$.

Méthode 2 — Utilisation de l'équation satisfaite par la racine.

Puisque $u_n > 0$ et $u_n^n + 9u_n^2 = 4$, on a $9u_n^2 = 4 - u_n^n < 4$. Ainsi $u_n^2 < 4/9$ et, en prenant les racines positives, $u_n < 2/3$. Avec $u_n > 0$, cela donne le même encadrement.

La première approche localise une racine avant de la connaître ; la seconde exploite directement l'identité qui la définit.

- 2) a. Si $0 < x < 1$, la multiplication de $x^n > 0$ par $x < 1$ donne $x^{n+1} < x^n$. Les autres termes de f_{n+1} et f_n sont identiques, donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

- b. Comme $u_{n+1} \in]0, 2/3[\subset]0, 1[$, la question précédente donne

$$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1}).$$

Or $f_n(u_n) = 0$ et f_n est strictement croissante ; l'inégalité $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ impose donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante.

- c. La suite est croissante et majorée par $2/3$. Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel ℓ . Les encadrements donnent $u_1 \leq \ell \leq 2/3$, donc $\ell > 0$.

- 3) a. L'encadrement de 1.c donne, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

La suite géométrique de raison $2/3 \in]0, 1[$ tend vers 0. Par encadrement, $u_n^n \rightarrow 0$.

L'argument utilise une majoration uniforme ; le seul fait que chaque $u_n < 1$ ne suffirait pas.

- b. Pour tout n , $u_n^n + 9u_n^2 = 4$. En passant à la limite dans cette somme finie, à l'aide de 3.a et de la continuité de $x \mapsto x^2$, on obtient $9\ell^2 = 4$. Comme $\ell > 0$, on conclut $\ell = 2/3$.

- 4) On établit la convergence en revenant à la définition par les sommes partielles.

L'identité précédente donne

$$u_n^n = 4 - 9u_n^2 = 9 \left(\frac{2}{3} - u_n \right) \left(\frac{2}{3} + u_n \right).$$

Comme $2/3 + u_n > 2/3$, les quantités sont positives et

$$0 < \frac{2}{3} - u_n = \frac{u_n^n}{9(2/3 + u_n)} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Pour tout $N \geq 1$, posons

$$S_N = \sum_{n=1}^N (2/3 - u_n).$$

Ses termes sont positifs, donc (S_N) est croissante. En sommant l'inégalité finie et en utilisant la formule d'une somme géométrique,

$$0 \leq S_N \leq \frac{1}{6} \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right) \leq \frac{1}{3}.$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée ; elle converge donc vers un réel fini. Par définition, la série

$$\sum_{n \geq 1} (2/3 - u_n)$$

converge. Cette preuve ne requiert que les sommes géométriques et la convergence monotone des suites.

Problème

On conserve les notations $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p \in]0, 1[$. Pour un nombre fixé n de lancers, chaque suite de résultats a pour probabilité le produit des probabilités de ses résultats, grâce à l'indépendance mutuelle. Les variables X_n sont à support fini, inclus dans $\{0, \dots, n-1\}$: toutes leurs espérances et variances existent.

Partie 1 : étude de quelques exemples

- 1) La variable X_2 vaut 0 pour les suites PP et FF , et vaut 1 pour PF et FP . Les événements correspondants sont incompatibles. Ainsi

k	0	1
$P(X_2 = k)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

Comme $p^2 + q^2 = 1 - 2pq$, X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.

2) a. Classons les huit suites possibles de trois résultats selon le nombre de changements.

Nombre de changements	Suites	Probabilité totale
0	PPP, FFF	$p^3 + q^3$
1	PPF, PFF, FPP, FFP	$2p^2q + 2pq^2$
2	PFP, FPF	$p^2q + pq^2$

En utilisant $p + q = 1$ et $p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q) = 1 - 3pq$, la loi est

k	0	1	2
$P(X_3 = k)$	$1 - 3pq$	$2pq$	pq

La somme vaut bien 1.

b. Méthode 1 — Calcul à partir de la loi.

Le support étant fini, on peut calculer les moments par sommes finies :

$$E(X_3) = 0(1 - 3pq) + 1(2pq) + 2(pq) = 4pq,$$

$$E(X_3^2) = 1^2(2pq) + 2^2(pq) = 6pq.$$

Par la formule de Kœnig-Huygens,

$$V(X_3) = 6pq - (4pq)^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

Méthode 2 — Indicatrices des changements.

Notons I_2 et I_3 les indicatrices d'un changement aux deuxième et troisième lancers. Alors $X_3 = I_2 + I_3$ et $P(I_2 = 1) = P(I_3 = 1) = 2pq$, puisque les deux résultats consécutifs doivent être PF ou FP . Ainsi $E(X_3) = 4pq$ par linéarité, sans supposer l'indépendance de I_2 et I_3 .

On a $P(I_2 = I_3 = 1) = P(PFP) + P(FPF) = p^2q + pq^2 = pq$. Donc $\text{Cov}(I_2, I_3) = pq - (2pq)^2 = pq - 4p^2q^2$. Chaque indicatrice a pour variance $2pq(1 - 2pq)$. La formule de variance d'une somme donne

$$V(X_3) = 2 \times 2pq(1 - 2pq) + 2(pq - 4p^2q^2) = 6pq - 16p^2q^2,$$

soit de nouveau $2pq(3 - 8pq)$. La première méthode est immédiate lorsque la loi est connue ; la seconde prépare l'étude d'un grand nombre de lancers et tient compte d'une éventuelle dépendance entre changements.

- 3) a. On classe cette fois les seize suites possibles. L'écriture d'une suite de lettres désigne l'intersection des événements des quatre résultats successifs.

Nombre de changements	Suites
0	$PPPP, FFFF$
1	$PFFF, PPFF, PPPF, FPPP, FFPP, FFFP$
2	$PFPP, PPFP, PFFP, FPFF, FFPP, FPPF$
3	$PFPP, FPPF$

Les suites de la ligne 1 ont pour probabilité totale $2pq^3 + 2p^2q^2 + 2p^3q = 2pq(p^2 + pq + q^2) = 2pq(1 - pq)$.

Celles de la ligne 2 ont pour probabilité totale $2p^3q + 2pq^3 + 2p^2q^2$, donc le même total

$$2pq(1 - pq).$$

La ligne 3 a pour probabilité totale $2p^2q^2$. Pour la ligne 0,

$$p^4 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 - 2p^2q^2 = (1 - 2pq)^2 - 2p^2q^2 = 1 - 4pq + 2p^2q^2.$$

La loi de X_4 est donc

k	0	1	2	3
$P(X_4 = k)$	$1 - 4pq + 2p^2q^2$	$2pq(1 - pq)$	$2pq(1 - pq)$	$2p^2q^2$

Ces quatre probabilités sont positives et leur somme vaut 1.

b. Méthode 1 — Espérance à partir de la loi.

On applique la définition de l'espérance à cette loi finie :

$$E(X_4) = 2pq(1 - pq) + 2 \times 2pq(1 - pq) + 3 \times 2p^2q^2 = 6pq.$$

Méthode 2 — Somme d'indicatrices.

Définissons I_k comme l'indicatrice d'un changement au lancer k , pour $k = 2, 3, 4$. Le nombre de changements est $X_4 = I_2 + I_3 + I_4$. Chaque indicatrice a pour espérance $P(P_{k-1}F_k) + P(F_{k-1}P_k) = pq + qp = 2pq$, par indépendance des lancers. La linéarité donne donc $E(X_4) = 3 \times 2pq = 6pq$.

La loi complète fournit directement le premier calcul ; la décomposition en indicatrices permet de calculer une espérance sans déterminer toute la loi.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$

- 1) L'événement $(X_n = 0)$ est la réunion incompatible des événements «les n lancers sont tous Pile» et «les n lancers sont tous Face». Par indépendance,

$$P(X_n = 0) = p^n + q^n.$$

- 2) Un seul changement signifie qu'il existe une unique longueur initiale $j \in \{1, \dots, n-1\}$ telle que les j premiers résultats soient identiques et les $n-j$ suivants soient tous le résultat opposé. Les événements ainsi définis sont incompatibles, car la position de l'unique changement et le premier résultat déterminent toute la suite. Leurs probabilités sont $p^j q^{n-j}$ et $q^j p^{n-j}$. Ainsi

$$P(X_n = 1) = \sum_{j=1}^{n-1} (p^j q^{n-j} + q^j p^{n-j}) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j},$$

la dernière égalité résultant du changement d'indice $j \mapsto n-j$ dans la seconde somme.

Posons

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j} = pq \sum_{r=0}^{n-2} p^r q^{n-2-r}.$$

La différence de deux sommes finies consécutives donne

$$(q-p) \sum_{r=0}^{n-2} p^r q^{n-2-r} = q^{n-1} - p^{n-1}.$$

Comme $q-p \neq 0$, on peut diviser et obtenir

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p} (q^{n-1} - p^{n-1}).$$

Cette expression est positive, car $q^{n-1} - p^{n-1}$ et $q-p$ sont de même signe. Pour $n=2$, elle donne bien $2pq$.

- 3) L'événement $(X_n = n - 1)$ correspond aux deux suites totalement alternées, l'une commençant par Pile, l'autre par Face. Elles sont incompatibles.

Si $n = 2m$ avec $m \geq 1$, chaque suite comprend m Pile et m Face, donc

$$P(X_{2m} = 2m - 1) = 2p^m q^m = 2(pq)^m.$$

Si $n = 2m + 1$ avec $m \geq 1$, leurs probabilités sont $p^{m+1}q^m$ et $q^{m+1}p^m$, donc

$$P(X_{2m+1} = 2m) = p^{m+1}q^m + q^{m+1}p^m = (pq)^m(p + q) = (pq)^m.$$

- 4) Pour $n = 3$, les questions 1, 2 et 3 donnent respectivement

$$P(X_3 = 0) = p^3 + q^3 = 1 - 3pq,$$

$$P(X_3 = 1) = \frac{2pq(q^2 - p^2)}{q - p} = 2pq(q + p) = 2pq,$$

$$P(X_3 = 2) = pq.$$

Ce sont toutes les valeurs possibles, et l'on retrouve la loi de la partie 1.

Pour $n = 4$, elles donnent

$$P(X_4 = 0) = p^4 + q^4 = 1 - 4pq + 2p^2q^2,$$

$$P(X_4 = 1) = \frac{2pq(q^3 - p^3)}{q - p} = 2pq(q^2 + pq + p^2) = 2pq(1 - pq),$$

$$P(X_4 = 3) = 2p^2q^2.$$

Comme $X_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$, la probabilité manquante vaut

$$P(X_4 = 2) = 1 - (1 - 4pq + 2p^2q^2 + 2pq(1 - pq) + 2p^2q^2) = 2pq(1 - pq).$$

La loi de X_4 est donc également retrouvée.

- 5) Sur chaque suite de lancers, chaque changement est compté exactement une fois par les indicatrices Z_k :

$$X_n = \sum_{k=2}^n Z_k.$$

Pour tout $k \geq 2$, l'événement $(Z_k = 1)$ est la réunion incompatible $P_{k-1}F_k \cup F_{k-1}P_k$. L'indépendance des deux lancers concernés donne $P(Z_k = 1) = pq + qp = 2pq$. Ainsi Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$, et $E(Z_k) = 2pq$.

Par linéarité de l'espérance d'une somme finie,

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^n E(Z_k) = 2(n-1)pq.$$

Il n'est pas nécessaire que les Z_k soient indépendantes pour ce calcul. D'ailleurs, lorsque $p \neq q$, deux changements consécutifs ne sont pas indépendants en général : $P(Z_k = Z_{k+1} = 1) = pq$, tandis que le produit des probabilités vaut $4p^2q^2$, et ces quantités ne sont pas égales lorsque $p \neq q$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$

- 1) Comme $p + q = 1$ et $p = q$, $p = q = 1/2$, donc $pq = 1/4$.

La loi de X_3 obtenue en partie 1 devient

k	0	1	2
$P(X_3 = k)$	1/4	1/2	1/4

Ces probabilités sont $\binom{2}{k}(1/2)^k(1/2)^{2-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi $X_3 \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$.

La loi de X_4 devient

k	0	1	2	3
$P(X_4 = k)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Ce sont les probabilités $\binom{3}{k}(1/2)^k(1/2)^{3-k}$. Ainsi $X_4 \sim \mathcal{B}(3, 1/2)$.

2) Méthode 1 — Indépendance des indicatrices de changement.

Fixons $n \geq 2$ et une suite prescrite $(z_2, \dots, z_n) \in \{0, 1\}^{n-1}$. Une fois le résultat du premier lancer fixé, cette suite d'indications détermine tous les résultats suivants : au rang k , on conserve le résultat précédent si $z_k = 0$, et on le change si $z_k = 1$. Il existe donc exactement deux suites de résultats produisant ces indications, correspondant aux deux choix du premier résultat.

Les lancers étant indépendants et équilibrés, chaque suite de n résultats a pour probabilité 2^{-n} . Les deux suites sont incompatibles, d'où

$$P(Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n) = 2 \times 2^{-n} = 2^{-(n-1)}.$$

Par ailleurs chaque Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq = 1/2$, donc $P(Z_k = z_k) = 1/2$. On a ainsi, pour toutes les valeurs prescrites,

$$P(Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n) = \prod_{k=2}^n P(Z_k = z_k).$$

C'est la caractérisation de l'indépendance mutuelle de ces variables discrètes. La somme $X_n = Z_2 + \dots + Z_n$ est donc une somme de $n - 1$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/2$. Par la définition de la loi binomiale,

$$X_n \sim \mathcal{B}(n - 1, 1/2).$$

Méthode 2 — Récurrence sur les probabilités.

Cette approche construit la loi sans établir d'abord l'indépendance des changements. Pour une suite quelconque des n premiers résultats, les deux résultats possibles au lancer suivant ont chacun une probabilité conditionnelle $1/2$ par indépendance des lancers. Exactement l'un provoque un changement. En additionnant sur les suites incompatibles ayant k changements, on obtient

$$P(X_n = k, Z_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = k)$$

et

$$P(X_n = k, Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = k).$$

Comme $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, pour tout entier k ,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k - 1),$$

avec la convention que les probabilités hors du support valent 0.

Au rang $n = 2$, $X_2 \sim \mathcal{B}(1, 1/2)$ d'après la partie 1. Supposons $P(X_n = k) = \binom{n-1}{k} 2^{-(n-1)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, la relation précédente et l'identité de Pascal donnent

$$P(X_{n+1} = k) = 2^{-n} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

Aux bornes $k = 0$ et $k = n$, la même relation donne respectivement 2^{-n} et 2^{-n} , en accord avec les coefficients $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Hors de $\{0, \dots, n\}$, la probabilité est nulle. L'hérédité est établie, et la récurrence conclut $X_n \sim \mathcal{B}(n-1, 1/2)$ pour tout $n \geq 2$.

La première méthode explique la structure des changements dans le cas équilibré ; la seconde calcule la loi par une relation d'évolution. Toutes deux donnent $E(X_n) = (n-1)/2$, en accord avec la partie 2.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité de modification mathématique : les énoncés et leur numérotation ont été conservés. Il n'y a aucun code informatique dans le sujet original, donc aucun code à convertir ou à exécuter comme réponse à une question. Le tracé demandé en exercice 1, question 4, est fourni en SVG inline dans le corrigé, à partir des formules exactes.