



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres. Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \text{ et } \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

(a) Dédurre de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.

(b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.

3. On suppose dans cette question que $a > 2$.

(a) Montrer que $A(a)$ possède quatre valeurs propres distinctes deux à deux.

(b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

EXERCICE 2

Pour tout réel a , on considère la fonction f_a de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)e^y.$$

Le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Partie 1 : étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f_a .
 (b) En déduire que f_a possède deux points critiques, c'est-à-dire des couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en lesquels f_a est susceptible de présenter un extremum local, et donner leurs coordonnées.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f_a et sa matrice hessienne.
 (a) Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a , f_a présente en ces points un extremum local. On étudiera les signes des valeurs propres des matrices hessiennes, sans calcul de déterminant.
 (b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a .

Partie 2 : étude d'une fonction définie à l'aide de f_a

1. (a) Pour tout réel x et pour tout réel t inférieur à x , calculer $\int_t^x e^y dy$.

En déduire que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^x e^y dy$ converge et donner sa valeur.

- (b) Pour tout réel x , montrer grâce à une intégration par parties que l'intégrale $J = \int_{-\infty}^x ye^y dy$ converge et donner sa valeur.

2. (a) Dédurre des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction F_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(x, y) dy.$$

- (b) Après avoir écrit $F'_a(x)$ en fonction de a et de x , donner le tableau de variation de F_a . On distinguera les trois cas : $a = -1$, $a < -1$ et $a > -1$.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \frac{1}{n}.$$

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \quad P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}.$

- (b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket, \quad P(X + Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$

2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :

$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

- (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

- (b) Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?

- (c) En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X + Y + Z = n+1)$.

PROBLÈME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

1. (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}.$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq 1 + \ln n.$

2. On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$\varphi_1(0) = 0$, et $\varphi_1(x) = x(1 + \ln x)$ si $x > 0$.

Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt.$$

On rappelle que φ_1 a été définie à la question 2.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

(b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x).$$

On montrera que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}.$$

4. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche les n premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n) pour une valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ entrée par l'utilisateur.

Documentation utile : `input(message)` affiche le message et renvoie le texte saisi ;
`int(texte)` convertit ce texte en entier ; `print(k, a, b)` affiche les trois valeurs ;
`range(1, n + 1)` parcourt les entiers de 1 à n inclus.

5. Calculer b_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = n!a_n$.

(a) Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $|c_n| \leq 1 + \ln n$.

(c) Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(d) Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_3(x) = x \ln x \quad \text{et} \quad e_4(x) = x^2 \ln x.$$

On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4 .

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont quatre réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad ax + bx^2 + cx \ln x + dx^2 \ln x = 0.$$

(a) Montrer que $a + b = 0$.

(b) Établir que :

$$\forall x > 1, \quad \frac{a}{x \ln x} + \frac{b}{\ln x} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

En déduire que $d = 0$.

(c) Établir ensuite que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{x} + b + c \frac{\ln x}{x} = 0.$$

En déduire que $b = 0$.

(d) Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

2. (a) Dédire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

(b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E .

3. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x f'(x).$$

(a) Montrer que u est une application linéaire.

(b) Déterminer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.

(c) En déduire que u est un endomorphisme de E .

4. (a) Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) .

(b) Montrer que u est un automorphisme de E .