



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. Cherchons les réels λ pour lesquels $A(0)V = \lambda V$ admet une solution

$V = {}^t(x, y, z, t) \neq 0$. Les deux dernières équations sont $t = \lambda z$ et $-z = \lambda t$. Elles donnent $(1 + \lambda^2)z = 0$. Comme λ est réel, $z = t = 0$.

Les deux premières équations deviennent $(1 - \lambda)x - 2y = 0$ et $(-1 - \lambda)y = 0$. Si $\lambda \notin \{-1, 1\}$, elles imposent $y = x = 0$: il n'y a pas de vecteur propre.

Pour $\lambda = 1$, on obtient $y = 0$, avec x libre. Pour $\lambda = -1$, on obtient $x = y$, avec y libre. Les deux espaces propres sont donc

$$E_1 = \text{Vect}\{{}^t(1, 0, 0, 0)\}, \quad E_{-1} = \text{Vect}\{{}^t(1, 1, 0, 0)\}.$$

Chacun contient un vecteur non nul : 1 et -1 sont bien les seules valeurs propres réelles de $A(0)$.

2. Pour $a > 0$, posons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour des colonnes $v, w \in \mathbb{R}^2$, l'équation propre s'écrit

$$(B - \lambda I_2)v + Kw = 0, \quad (C - \lambda I_2)w = 0.$$

Un produit direct donne $B^2 = (a-1)^2 I_2$. Si $w = 0$, alors $v \neq 0$ et $Bv = \lambda v$, d'où $\lambda^2 = (a-1)^2$.

Si $w = {}^t(z, t) \neq 0$, les équations du bas sont $-az + t = \lambda z$ et $-z = \lambda t$. On a nécessairement $t \neq 0$; en remplaçant z par $-\lambda t$, on obtient $(\lambda^2 + a\lambda + 1)t = 0$. Ainsi $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$. Cela prouve la nécessité des équations annoncées.

Réciproquement, si $\lambda^2 = (a-1)^2$, la colonne $v = {}^t(\lambda + 1, a)$ est non nulle puisque $a > 0$,

et

$$Bv = \begin{pmatrix} \lambda + 1 + a(a - 2) \\ a\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda + 1) \\ a\lambda \end{pmatrix} = \lambda v.$$

Donc ${}^t(v, 0)$ est un vecteur propre de $A(a)$.

Si $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$, choisissons $w = {}^t(-\lambda, 1)$, qui vérifie $Cw = \lambda w$. Lorsque $\lambda^2 = (a - 1)^2$ aussi, la construction précédente fournit déjà un vecteur propre de $A(a)$. Sinon, l'identité

$$(B - \lambda I_2)(B + \lambda I_2) = ((a - 1)^2 - \lambda^2)I_2$$

montre que $B - \lambda I_2$ est inversible. La colonne $v = -(B - \lambda I_2)^{-1}Kw$ satisfait alors la première équation ; le vecteur ${}^t(v, w)$ est non nul puisque $w \neq 0$. Dans tous les cas, λ est valeur propre.

Ainsi les valeurs propres réelles sont exactement les solutions réelles de l'une ou l'autre des deux équations données, sans recours à un déterminant spectral.

(a) Une matrice carrée est non inversible si et seulement si son noyau contient un vecteur non nul, c'est-à-dire si 0 est valeur propre. Pour $\lambda = 0$, la seconde équation donne $1 = 0$, ce qui est impossible ; la première donne $(a - 1)^2 = 0$. L'unique valeur cherchée est donc $a = 1$.

(b) Méthode 1 — Valeurs propres d'une matrice diagonalisable.

Pour $a = 1$, les équations sont $\lambda^2 = 0$ et $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Or $\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. La seule valeur propre réelle de $A(1)$ est donc 0.

Si $A(1)$ était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient nuls, donc à la matrice nulle. Cela imposerait $A(1) = 0$, alors que son coefficient de première ligne et première colonne vaut 1. Ainsi $A(1)$ n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Dimension de l'espace propre.

Dans le système $A(1)^t(x, y, z, t) = 0$, les deux dernières équations donnent $z = t = 0$. Les deux premières se réduisent à $x - y = 0$. Ainsi $\text{Ker } A(1) = \text{Vect}\{^t(1, 1, 0, 0)\}$ est de dimension 1.

Comme 0 est la seule valeur propre, tous les vecteurs propres appartiennent à cette droite : ils ne peuvent former une base de $\mathbb{R}^4$. Cela confirme l'absence de diagonalisation. La première méthode est rapide lorsque la seule valeur propre est nulle ; la seconde met en évidence le nombre de directions propres disponibles.

3. On suppose $a > 2$.

(a) La première équation fournit $a - 1 > 0$ et $1 - a < 0$, qui sont distincts. La seconde a pour discriminant $a^2 - 4 > 0$, donc possède deux racines réelles distinctes

$$\lambda_- = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Elles sont toutes deux négatives, car $0 < \sqrt{a^2 - 4} < a$. Aucune ne peut donc être égale à $a - 1$. En outre, pour $q(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1$,

$$q(1 - a) = (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 = 2 - a \neq 0.$$

Aucune des deux racines n'est égale à $1 - a$. Nous avons donc quatre valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

(b) Choisissons un vecteur propre non nul pour chacune des quatre valeurs propres. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. Ces quatre vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^4$, ce qui prouve que $A(a)$ est diagonalisable.

EXERCICE 2

Partie 1 : étude des extrema de f_a

Le paramètre vérifie ici $a \neq 0$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. La fonction f_a est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, car elle est le produit d'un polynôme et de l'exponentielle d'une coordonnée. Les conditions sur le gradient et la hessienne s'appliquent donc à tous ses points critiques.

1. (a) En dérivant le produit dans la seconde variable, on obtient

$$\partial_1 f_a(x, y) = (y + 2ax)e^y,$$

$$\partial_2 f_a(x, y) = (2 + y + xy + x + ax^2)e^y.$$

(b) Comme $e^y > 0$, la première dérivée s'annule si et seulement si $y = -2ax$. En reportant cette égalité dans la seconde, l'équation devient

$$2 + (1 - 2a)x - ax^2 = 0, \text{ soit } (x + 2)(ax - 1) = 0.$$

Puisque $a \neq 0$, les solutions sont $x = -2$ et $x = 1/a$. Les points critiques sont donc

$$P = (-2, 4a), \quad Q = (1/a, -2).$$

Ils sont distincts car leur égalité imposerait $a = -1/2$, valeur exclue. Aucun autre point critique n'existe.

2. Question adaptée au programme actuel : la hessienne est explicitée et utilisée dans la question suivante.

Les dérivées secondes sont

$$\partial_{1,1}^2 f_a(x, y) = 2ae^y,$$

$$\partial_{1,2}^2 f_a(x, y) = \partial_{2,1}^2 f_a(x, y) = (1 + y + 2ax)e^y,$$

$$\partial_{2,2}^2 f_a(x, y) = (3 + y + xy + 2x + ax^2)e^y.$$

L'égalité des dérivées croisées est aussi garantie par le théorème de Schwarz, puisque f_a

est C^2 . Ainsi

$$\nabla^2 f_a(x, y) = e^y \begin{pmatrix} 2a & 1 + y + 2ax \\ 1 + y + 2ax & 3 + y + xy + 2x + ax^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Question adaptée au programme actuel : on étudie les valeurs propres des hessiennes sans déterminant.

Aux points critiques, la relation $\partial_2 f_a = 0$ simplifie le dernier coefficient en $1 + x$ et $y + 2ax = 0$ simplifie le coefficient croisé en 1. Par conséquent,

$$\nabla^2 f_a(P) = e^{4a} \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_a(Q) = e^{-2} \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 1 + 1/a \end{pmatrix}.$$

Pour étudier ces deux matrices, établissons directement un calcul utile. Pour

$$M = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix}, \text{ posons}$$

$$\mu_{\pm} = \frac{u + v \pm \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2}.$$

Ces deux réels sont distincts et vérifient $(\mu_{\pm} - u)(\mu_{\pm} - v) = 1$. Ainsi

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{\pm} - u \end{pmatrix} = \mu_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{\pm} - u \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs propres indépendants forment une base de $\mathbb{R}^2$: les deux valeurs propres de M sont exactement μ_- et μ_+ . Ce calcul ne fait intervenir aucun déterminant.

Au point P , elles sont, avant multiplication par $e^{4a} > 0$,

$$\mu_{\pm} = \frac{2a - 1 \pm \sqrt{(2a + 1)^2 + 4}}{2}.$$

Notons $D = (2a + 1)^2 + 4$. On a $D - (2a - 1)^2 = 4(2a + 1)$.

Si $a < -1/2$, alors $2a - 1 < 0$ et $\sqrt{D} < |2a - 1|$: les deux valeurs propres sont strictement négatives. Ainsi P est un maximum local strict.

Si $a > -1/2$, alors $\sqrt{D} > |2a - 1|$: les deux valeurs propres sont de signes opposés. Ainsi P est un point selle et n'est pas un extremum local.

Au point Q , posons $T = 2a + 1 + 1/a$ et $D = (2a - 1 - 1/a)^2 + 4$. Les deux valeurs propres, avant multiplication par $e^{-2} > 0$, sont $(T - \sqrt{D})/2$ et $(T + \sqrt{D})/2$. Un développement donne

$$T^2 - D = 4(2a + 1).$$

Si $a < -1/2$, alors $D > T^2$: les deux valeurs propres sont de signes opposés. Le point Q est un point selle.

Si $-1/2 < a < 0$, alors $D < T^2$. De plus, $2a + 1 < 1$ et $1/a < -2$, donc $T < 0$. Les deux valeurs propres sont strictement négatives : Q est un maximum local strict.

Si $a > 0$, alors $D < T^2$ et $T > 0$. Les deux valeurs propres sont strictement positives : Q est un minimum local strict.

Les valeurs exclues garantissent que nous n'avons aucun cas où une valeur propre serait nulle. Le critère des hessiennes suffit donc dans tous les cas considérés.

(b) En substituant les coordonnées des points critiques, on obtient

$$f_a(P) = (1 + 4a - 8a + 4a)e^{4a} = e^{4a},$$

$$f_a(Q) = (1 - 2 - 2/a + 1/a)e^{-2} = -(1 + 1/a)e^{-2}.$$

La classification complète des extrema locaux est donc :

Condition sur a	Nature de l'extremum	Point	Valeur
$a < -1/2$	maximum local strict	P	e^{4a}
$-1/2 < a < 0$	maximum local strict	Q	$-(1 + 1/a)e^{-2}$
$a > 0$	minimum local strict	Q	$-(1 + 1/a)e^{-2}$

Dans chaque cas, l'autre point critique est un point selle. Tout extremum local d'une fonction C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ étant critique, il n'y a pas d'autre extremum local. Ces conclusions portent sur les extrema locaux demandés.

Partie 2 : étude d'une fonction définie à l'aide de f_a

Dans cette partie, a est de nouveau un réel quelconque.

1. (a) Pour $t < x$, l'exponentielle est continue sur le segment $[t, x]$ et est sa propre primitive, donc

$$\int_t^x e^y dy = e^x - e^t.$$

Lorsque $t \rightarrow -\infty$, $e^t \rightarrow 0$. Par définition de l'intégrale généralisée, celle-ci converge et $I = e^x$.

- (b) Effectuons d'abord l'intégration par parties sur le segment $[t, x]$, avec les fonctions y et e^y , de classe C^1 :

$$\int_t^x ye^y dy = [ye^y]_t^x - \int_t^x e^y dy = (x-1)e^x - (t-1)e^t.$$

Par croissances comparées, $te^t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$; par conséquent $(t-1)e^t \rightarrow 0$.

L'intégrale généralisée converge et

$$J = (x-1)e^x.$$

2. (a) Question adaptée au programme actuel. Rectification de la source : dans la définition intégrale, la notation $F'_a(x)$ est remplacée par $F_a(x)$, conformément à la phrase qui annonce définir F_a . La dérivée F'_a est ensuite calculée en question 2(b). Cette rectification fixe une fonction unique.

Pour chaque réel x fixé, la fonction de y à intégrer est continue et s'écrit

$$f_a(x, y) = (1 + ax^2)e^y + (1 + x)ye^y.$$

Les deux intégrales du membre de droite convergent d'après les questions précédentes. Par linéarité, l'intégrale de $f_a(x, y)$ sur $] -\infty, x]$ converge, quelle que soit la valeur réelle de a . Elle définit donc bien une valeur $F_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) La formule précédente donne

$$F_a(x) = (1 + ax^2)e^x + (1 + x)(x-1)e^x = ((a+1)x^2 + x)e^x.$$

Posons $b = a + 1$. La fonction est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$F'_a(x) = (bx^2 + (2b+1)x + 1)e^x.$$

Dans tous les cas, la limite en $-\infty$ vaut 0, par croissances comparées. Les autres limites et variations se lisent sur le polynôme de la dérivée, puisque $e^x > 0$.

Si $a = -1$, donc $b = 0$, on a $F_{-1}(x) = xe^x$ et $F'_{-1}(x) = (x+1)e^x$. La limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ et $F_{-1}(-1) = -e^{-1}$. Le tableau est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de F'_{-1}	$-$	0	$+$
F_{-1}	0	$\searrow -e^{-1} \nearrow$	$+\infty$

Si $a < -1$, donc $b < 0$, le discriminant du polynôme de la dérivée vaut $4b^2 + 1 > 0$. Ses

racines, écrites dans l'ordre croissant, sont

$$\alpha = \frac{-(2b+1) + \sqrt{4b^2+1}}{2b}, \quad \beta = \frac{-(2b+1) - \sqrt{4b^2+1}}{2b}.$$

Leur produit est $1/b < 0$, donc $\alpha < 0 < \beta$. La dérivée est négative à l'extérieur de $[\alpha, \beta]$ et positive à l'intérieur. La limite de F_a en $+\infty$ vaut $-\infty$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
Signe de F'_a	—	0 puis +	0 puis —	—
F_a	0	$\searrow F_a(\alpha)$	$\nearrow F_a(\beta)$	$\searrow -\infty$

Si $a > -1$, donc $b > 0$, les deux racines dans l'ordre croissant sont

$$\alpha = \frac{-(2b+1) - \sqrt{4b^2+1}}{2b}, \quad \beta = \frac{-(2b+1) + \sqrt{4b^2+1}}{2b}.$$

On a $\alpha < \beta < 0$: en effet $(2b+1)^2 > 4b^2+1$, donc $2b+1 > \sqrt{4b^2+1}$. La dérivée est positive à l'extérieur de $[\alpha, \beta]$ et négative à l'intérieur. La limite de F_a en $+\infty$ vaut $+\infty$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
Signe de F'_a	+	0 puis —	0 puis +	+
F_a	0	$\nearrow F_a(\alpha)$	$\searrow F_a(\beta)$	$\nearrow +\infty$

Dans les deux derniers tableaux, les valeurs aux points stationnaires sont explicitement données, pour $r \in \{\alpha, \beta\}$, par

$$F_a(r) = (br^2 + r)e^r = (-2br - 1)e^r,$$

car $br^2 + (2b+1)r + 1 = 0$. Cela précise toutes les valeurs finies des tableaux.

EXERCICE 3

On a $n \geq 1$. Pour tout couple $(j, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'indépendance et l'uniformité donnent $P(X = j, Y = \ell) = 1/n^2$.

1. (a) Si $2 \leq k \leq n+1$, l'événement $[X + Y = k]$ est la réunion disjointe des événements $[X = j, Y = k - j]$ pour $j = 1, \dots, k - 1$. En effet, pour ces indices, les deux valeurs sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et tout couple de somme k apparaît une fois.

Il y a $k - 1$ couples, chacun de probabilité $1/n^2$. Par additivité,

$$P(X + Y = k) = \frac{k - 1}{n^2}.$$

- (b) Si $n + 2 \leq k \leq 2n$, les conditions $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k - j \leq n$ équivalent à $k - n \leq j \leq n$. Il y a $n - (k - n) + 1 = 2n - k + 1$ entiers possibles. Les événements correspondants sont disjoints et de probabilité $1/n^2$, donc

$$P(X + Y = k) = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

Si $n = 1$, cet intervalle d'indices est vide : l'énoncé n'impose alors aucune valeur dans cette sous-question.

2. Utilisons le système complet $([Z = k])_{1 \leq k \leq n}$, dont chaque événement a une probabilité $1/n > 0$. Le lemme des coalitions assure l'indépendance de $X + Y$ et de Z ; ainsi

$$P(X + Y = Z) = \sum_{k=1}^n P(X + Y = k \mid Z = k)P(Z = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X + Y = k).$$

Le terme $k = 1$ est nul puisque $X + Y \geq 2$. Pour $n \geq 2$, la question 1(a) donne

$$P(X + Y = Z) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^n (k - 1) = \frac{1}{n^3} \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n - 1}{2n^2}.$$

Pour $n = 1$, $X + Y = 2$ et $Z = 1$ avec probabilité 1, donc la probabilité vaut 0, également donnée par la formule. Le résultat est ainsi valable pour tout $n \geq 1$.

(a) La transformation $k \mapsto n + 1 - k$ permute les entiers de 1 à n . Par conséquent T prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout k dans cet ensemble,

$$P(T = k) = P(Z = n + 1 - k) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi T suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(b) La variable T est une fonction de Z , qui est indépendante du couple (X, Y) par indépendance mutuelle. Le lemme des coalitions donne donc l'indépendance de T et du couple (X, Y) .

Plus précisément, pour $j, \ell, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(X = j, Y = \ell, T = k) = P(X = j, Y = \ell, Z = n + 1 - k) = \frac{1}{n^3}.$$

C'est le produit des trois probabilités marginales : X , Y et T sont mutuellement indépendantes. C'est cette propriété complète qui permet d'appliquer la question 2 au nouveau triplet.

(c) On a l'égalité d'événements

$[X + Y + Z = n + 1] = [X + Y = n + 1 - Z] = [X + Y = T]$. Les variables X , Y et T satisfont exactement les hypothèses de la question 2. Par conséquent,

$$P(X + Y + Z = n + 1) = \frac{n - 1}{2n^2},$$

y compris pour $n = 1$, où l'événement est impossible.

PROBLÈME

Partie 1

- (a) Si $p \geq 1$ et $t \in [p, p + 1]$, alors $t > 0$ et $1/t \geq 1/(p + 1)$. Les fonctions sont continues sur ce segment. En intégrant cette inégalité,

$$\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \int_p^{p+1} \frac{dt}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

(b) Pour $n \geq 2$, sommons les inégalités de la question précédente pour $p = 1, \dots, n-1$. La relation de Chasles donne

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Le membre de gauche vaut $u_n - 1$. Donc $u_n \leq 1 + \ln n$. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 = 1 + \ln 1$, ce qui complète la démonstration.

2. Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x(1 + \ln x)$ est continue par opérations sur les fonctions usuelles. Au voisinage de 0 à droite, les croissances comparées donnent $x \ln x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_1(x) = 0 = \varphi_1(0).$$

La fonction φ_1 est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. On utilise la définition intégrale de φ_{n+1} .

(a) Raisonnons par récurrence. Pour $n = 1$, la question 2 donne la continuité et la définition donne $\varphi_1(0) = 0$.

Supposons φ_n définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \geq 0$, elle est continue sur le segment $[0, x]$, donc intégrable sur ce segment. La fonction $x \mapsto \int_0^x \varphi_n(t) dt$ est une primitive de φ_n sur $]0, +\infty[$ et y est donc continue. Elle est aussi continue à droite en 0 : sur $[0, 1]$, la fonction continue $|\varphi_n|$ est majorée par un réel M , d'où, pour $0 \leq x \leq 1$,

$$|\varphi_{n+1}(x)| \leq Mx \rightarrow 0.$$

Enfin $\varphi_{n+1}(0) = \int_0^0 \varphi_n(t) dt = 0$. La récurrence établit que toutes les fonctions φ_n sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$, et que $\varphi_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Pour $n = 1$, l'expression demandée est vérifiée avec $a_1 = b_1 = 1$. Supposons qu'elle le soit au rang n . Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $t^n(a_n + b_n \ln t)$ est

$$G(t) = t^{n+1} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} + \frac{b_n}{n+1} \ln t \right).$$

En effet, la dérivée du facteur t^{n+1} restitue les termes $a_n + b_n \ln t - b_n/(n+1)$ et la dérivée du logarithme apporte $b_n/(n+1)$: les deux derniers termes se compensent. La primitive peut aussi être obtenue par une intégration par parties sur un segment $[\varepsilon, x]$ avec $0 < \varepsilon < x$.

Les croissances comparées donnent $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. D'autre part, φ_n est continue sur $[0, x]$; ainsi $\int_0^\varepsilon \varphi_n(t) dt \rightarrow 0$, par majoration par une constante fois ε . On peut donc passer à la limite dans l'identité sur le segment $[\varepsilon, x]$, ce qui donne

$$\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} + \frac{b_n}{n+1} \ln x \right).$$

La récurrence est établie avec

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}.$$

Le passage à 0 utilise uniquement la continuité de la fonction intégrée sur le segment, sans supposer de règle générale sur des singularités en borne finie.

4. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la demande de programmation ancienne est remplacée par une demande en Python.

Le programme suivant utilise les initialisations $a_1 = b_1 = 1$. À l'entrée de la boucle d'indice k , les variables a et b contiennent respectivement a_k et b_k .

Python

```
n = int(input("Entrer un entier n strictement positif : "))
if n < 1:
    print("n doit être strictement positif.")
else:
    a = 1.0
    b = 1.0
```

```
for k in range(1, n + 1):
    print(k, a, b)
    if k < n:
        a = a / (k + 1) - b / (k + 1) ** 2
        b = b / (k + 1)
```

La boucle affiche exactement les indices de 1 à n . La mise à jour de a précède celle de b , de sorte que son calcul utilise bien l'ancienne valeur b_k . Aucun import n'est nécessaire. La condition $k < n$ évite un calcul supplémentaire après le dernier affichage. Le programme signale les entiers non positifs ; l'énoncé suppose une saisie entière.

Code exécuté pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$ et $n = 10$, ainsi que pour les entiers 0 et -1 afin de contrôler le message associé. Les valeurs calculées ont été confrontées aux formules exactes établies ci-dessous. Pour $n = 5$, les valeurs affichées, arrondies ici pour la lecture, sont :

k	a_k	b_k
1	1	1
2	0,25	0,5
3	0,0277778	0,166667
4	-0,00347222	0,0416667
5	-0,00236111	0,00833333

Ces affichages sont des approximations en arithmétique flottante ; les démonstrations des formules sont données aux questions suivantes.

5. La récurrence $b_{n+1} = b_n / (n + 1)$ et l'initialisation $b_1 = 1$ donnent, par récurrence,

$$b_n = \frac{1}{n!} \quad (n \geq 1).$$

En effet, la formule est vraie pour $n = 1$, et $b_{n+1} = 1 / (n!(n + 1)) = 1 / (n + 1)!$ si elle est vraie au rang n . On utilise maintenant $c_n = n!a_n$.

(a) Multiplions la relation de récurrence de a_n par $(n+1)!$. Grâce à $n!b_n = 1$, il vient

$$c_{n+1} = n!a_n - \frac{n!b_n}{n+1} = c_n - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $c_1 = 1$ et $u_1 = 1$, on a $c_1 = 2 - u_1$. De plus, si $c_n = 2 - u_n$, alors

$$c_{n+1} = 2 - u_n - \frac{1}{n+1} = 2 - u_{n+1}.$$

Par récurrence, $c_n = 2 - u_n$ pour tout $n \geq 1$, d'où aussi $a_n = (2 - u_n)/n!$.

(b) Tous les termes de u_n sont positifs et $u_n \geq 1$. En distinguant $1 \leq u_n \leq 2$ et $u_n \geq 2$, on obtient dans les deux cas $|2 - u_n| \leq u_n$: dans le premier, $2 - u_n \leq u_n$ car $u_n \geq 1$; dans le second, $u_n - 2 \leq u_n$.

La question 1(b) donne alors, pour $n \geq 2$,

$$|c_n| = |2 - u_n| \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

(c) Pour $x \geq 1$, la fonction $x - 1 - \ln x$ est nulle en 1 et a pour dérivée $1 - 1/x \geq 0$. Ainsi $1 + \ln n \leq n$ pour $n \geq 1$. D'après la question précédente, pour $n \geq 2$,

$$|a_n| \leq \frac{1 + \ln n}{n!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Le produit $(n-1)!$ est au moins 2^{n-2} pour $n \geq 2$, car les $n-2$ facteurs de 2 à $n-1$ sont tous au moins 2 ; pour $n=2$, il s'agit du produit vide, égal à 1. Par conséquent

$$0 \leq |a_n| \leq 2^{2-n} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement donne $a_n \rightarrow 0$.

(d) Montrons directement que les sommes partielles de la série des valeurs absolues convergent. Elles sont croissantes, car leurs termes sont positifs. Pour tout $N \geq 2$, la majoration précédente donne

$$\sum_{n=1}^N |a_n| \leq 1 + \sum_{n=2}^N 2^{2-n} = 1 + 2(1 - 2^{-(N-1)}) \leq 3.$$

La suite de ces sommes partielles est donc croissante et majorée ; elle converge. Par définition,

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

est absolument convergente. Cette preuve utilise seulement une somme géométrique et le théorème de convergence des suites monotones.

Partie 2

Les fonctions sont considérées sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On part de l'identité $ax + bx^2 + cx \ln x + dx^2 \ln x = 0$, valable pour tout $x > 0$.

(a) En choisissant $x = 1$ et en utilisant $\ln 1 = 0$, on obtient immédiatement $a + b = 0$.

(b) Pour $x > 1$, $x^2 \ln x \neq 0$. En divisant l'identité par ce nombre, on obtient

$$\frac{a}{x \ln x} + \frac{b}{\ln x} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les trois premiers termes tendent vers 0. Le passage à la limite donne donc $d = 0$.

(c) Avec $d = 0$, l'identité de départ devient $ax + bx^2 + cx \ln x = 0$. Pour tout $x > 0$, divisons par $x^2 \neq 0$:

$$\frac{a}{x} + b + c \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Par croissances comparées, $\ln x/x \rightarrow 0$ en $+\infty$; de même $a/x \rightarrow 0$. Ainsi $b = 0$.

(d) La relation $a + b = 0$ et l'égalité $b = 0$ donnent $a = 0$. Avec $d = 0$ également, l'identité initiale se réduit à $cx \ln x = 0$ pour tout $x > 0$. En prenant $x = e$, on obtient $ce = 0$, donc $c = 0$.

Ainsi $a = b = c = d = 0$.

2. (a) Une relation linéaire $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0$ dans l'espace des fonctions équivaut à l'identité de la question 1 pour tout $x > 0$. Cette question a démontré que tous les coefficients d'une telle relation sont nuls. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc libre.

(b) Par définition, $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$: la famille est génératrice de E . Étant aussi libre, elle est une base de E , qui est donc un espace vectoriel concret de dimension 4.

3. Chaque fonction de E est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, car elle est combinaison linéaire des quatre fonctions usuelles données. L'expression $xf'(x)$ est donc bien définie pour $x > 0$.

(a) Soient $f, h \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La linéarité de la dérivation donne, pour tout $x > 0$,

$$u(\alpha f + \beta h)(x) = x(\alpha f' + \beta h')(x) = \alpha u(f)(x) + \beta u(h)(x).$$

C'est une égalité de fonctions. L'application u , considérée d'abord de E vers les fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$, est donc linéaire. La question (c) vérifiera que son image est contenue dans E .

(b) En dérivant les quatre fonctions puis en multipliant par x , on obtient

$$u(e_1)(x) = x = e_1(x),$$

$$u(e_2)(x) = 2x^2 = 2e_2(x),$$

$$u(e_3)(x) = x(\ln x + 1) = e_3(x) + e_1(x),$$

$$u(e_4)(x) = x(2x \ln x + x) = 2e_4(x) + e_2(x).$$

Ainsi $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$, $u(e_3) = e_1 + e_3$ et $u(e_4) = e_2 + 2e_4$.

(c) Les images des quatre vecteurs de la base appartiennent à E . Par linéarité, l'image de toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient donc également à E . Ainsi $u(E) \subset E$ et u est une application linéaire de E dans lui-même, donc un endomorphisme de E .

4. (a) La colonne d'indice j de la matrice représente les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base donnée. Les résultats de la question 3(b) donnent donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Méthode 1 — Matrice triangulaire.

La matrice A est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux 1, 2, 1, 2 sont tous non nuls. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi A est inversible et l'endomorphisme u est un automorphisme de E .

Méthode 2 — Résolution pour un second membre quelconque.

Soit $h = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 \in E$. Cherchons $f = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ tel que $u(f) = h$.

La question 3(b) et l'unicité des coordonnées dans une base donnent le système

$$a + c = \alpha, \quad 2b + d = \beta, \quad c = \gamma, \quad 2d = \delta.$$

Il a une unique solution :

$$c = \gamma, \quad d = \delta/2, \quad a = \alpha - \gamma, \quad b = \beta/2 - \delta/4.$$

Tout élément h de E a donc un unique antécédent par u . Ainsi u est bijective et, étant linéaire de E dans E , c'est un automorphisme. Cette méthode fournit en plus l'action explicite de l'inverse, tandis que la première permet de conclure directement à partir de la matrice.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule et partie 1, question 2 : indication que le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert et ajout explicite de la matrice hessienne aux dérivées secondes, pour appliquer les conditions d'extremum dans le cadre actuel.
- Exercice 2, partie 1, question 2(a) : précision de la méthode par les signes des valeurs propres de la hessienne, sans déterminant. Les conditions et conclusions demandées sont conservées.
- Exercice 2, partie 2, question 2(a) : rectification de $F'_a(x)$ en $F_a(x)$ dans la définition intégrale, pour définir la fonction annoncée de façon unique ; la question 2(b) conserve la demande du calcul de F'_a puis des variations de F_a .
- Problème, partie 1, question 4 : Code adapté en Python ; la consigne de programmation ancienne est convertie et les commandes de saisie, conversion, affichage et parcours sont documentées. Aucun code à trous ne figurait dans la source.