



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

1. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln x + 2x + 1$.

(a) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

(b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x(\ln x + x + y^2).$$

(a) Déterminer le seul point critique de f , c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.

(b) Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point, en calculant sa hessienne et en étudiant les signes de ses valeurs propres.

(c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 2

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On identifie E à $\mathbb{R}^3$ par les coordonnées dans cette base.

Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. (a) Déterminer une base de $\text{Im } f_a$.

(b) Montrer qu'une base de $\text{Ker } f_a$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

2. Écrire la matrice A de f_a dans $\mathcal{B}$ et calculer A^2 . En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$.
3. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_3$.
 - (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E .
 - (b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.
 - (c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A . A est-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ?
4. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI$, I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer sans calcul que $B(x)$ est inversible.
 - (b) Calculer $(A - xI)(A + xI)$ puis écrire $(B(x))^{-1}$ en fonction de x , I et A .
 - (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $(B(x))^n$ en fonction de x , n , I et A .

Exercice 3

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $1/2$.

On note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient pile (respectivement face) au k -ième lancer ». Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k , où $k \geq 2$ est entier, X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
 - (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1 P_2 F_3 \cup F_1 P_2 F_3$, calculer $P(X = 3)$.

(b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier $k \geq 3$, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $k - 1$ événements incompatibles.

(c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

(d) Calculer $P(X = 0)$.

2. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 1(c) par une autre méthode.

(a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \cdots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

(b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$\forall k \geq 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}.$$

(c) On pose, pour tout entier $k \geq 2$, $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

3. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Problème

La partie I permet d'établir des résultats utiles pour les parties II et III. Les parties II et III sont indépendantes entre elles.

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1. (a) Dresser le tableau de variations de f .

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt.$$

(b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.

(b) Montrer, grâce à la question I.1, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_{n+1} \geq 0$.

(c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2. (a) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}).$$

(b) En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est convergente.

(c) En utilisant la question I.2, montrer que $u_n - u_{n+1} \sim u_n^2/2$ en $+\infty$.

(d) Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2 .

Partie III

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(x) = f(x)/x$.

Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \phi(t) dt$.

(a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

(c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner $g'(0)$. La dérivée en 0 est comprise comme une dérivée à droite.

2. (a) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\int_1^x \phi(t) dt \leq \ln x$.

(b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

3. (a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = h(x)/x^2$.

(b) Montrer alors que $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

(c) Étudier la fonction notée k définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

(d) Donner le signe de k , puis les variations de h et enfin celles de g .

(e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.