



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. (a) Sur $]0, +\infty[$, g est dérivable et $g'(x) = 1/x + 2 > 0$. Elle est donc strictement croissante.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $2x + 1 \rightarrow 1$, donc $g(x) \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les termes $\ln x$ et $2x$ tendent vers $+\infty$, donc $g(x) \rightarrow +\infty$.

x	0^+		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- (b) La fonction g est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et ses limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Or $g(1/e) = -1 + 2/e + 1 = 2/e > 0 = g(\alpha)$. La stricte croissance donne $\alpha < 1/e$. Ainsi $\alpha \in]0, 1/e[$.

2. (a) Question adaptée au programme actuel : le domaine $D =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est explicitement annoncé ouvert. Sur cet ouvert, f est de classe C^2 par les règles d'opérations et de composition appliquées au logarithme et aux polynômes.

Les dérivées partielles sont :

$$\partial_1 f(x, y) = \ln x + 1 + 2x + y^2 = g(x) + y^2, \quad \partial_2 f(x, y) = 2xy.$$

Puisque $x > 0$, l'équation $\partial_2 f(x, y) = 0$ impose $y = 0$. L'autre équation devient $g(x) = 0$, donc $x = \alpha$ par 1(b). Le seul point critique est ainsi $(\alpha, 0)$. La condition nécessaire d'extremum sur un ouvert s'applique puisque f est de classe C^1 : tout extremum local éventuel se trouve en ce point.

- (b) Question adaptée au programme actuel : la méthode de la hessienne et du signe de

ses valeurs propres est précisée.

Méthode 1 — Hessienne au point critique.

Les dérivées secondes, continues sur D , donnent :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 1/x + 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 1/\alpha + 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale. Ses valeurs propres sont ses deux coefficients diagonaux $1/\alpha + 2$ et 2α , strictement positifs car $\alpha > 0$. Le critère suffisant pour une fonction C^2 sur un ouvert donne donc un minimum local strict en $(\alpha, 0)$. On note $m = f(\alpha, 0)$.

Méthode 2 — Réduction à une fonction d'une variable.

Cette approche donne aussi la portée globale du minimum. Posons $p(x) = x \ln x + x^2$ pour $x > 0$. Alors $p'(x) = g(x)$, donc p est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$. Elle atteint son unique minimum global en α .

Pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = p(x) + xy^2 \geq p(x) \geq p(\alpha) = f(\alpha, 0)$. La première égalité impose $y = 0$ puisque $x > 0$, et la seconde impose $x = \alpha$. Le minimum est donc même global et strict. La hessienne est la méthode locale demandée ; cette décomposition est utile lorsque la dépendance en une variable est un terme positif.

(c) L'équation $g(\alpha) = 0$ donne $\ln \alpha = -2\alpha - 1$. Ainsi :

$$m = \alpha(\ln \alpha + \alpha) = \alpha(-2\alpha - 1 + \alpha) = -\alpha(\alpha + 1).$$

Exercice 2

Question adaptée au programme actuel : l'identification de E à $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{B}$ permet de mener toute l'étude sur les coordonnées et les matrices réelles.

1. (a) Posons $v = ae_1 + e_2 - ae_3$. Pour tout $u = se_1 + te_2 + re_3$, la linéarité donne $f_a(u) = (s+r)v$. Donc $\text{Im } f_a \subset \text{Vect}(v)$. Réciproquement, $v = f_a(e_1)$ appartient à l'image, donc ces deux espaces sont égaux.

Le vecteur v n'est jamais nul, y compris lorsque $a = 0$, car sa coordonnée suivant e_2 vaut 1.

1. Par conséquent, $(ae_1 + e_2 - ae_3)$ est une base de l'image, de dimension 1.

(b) Avec les notations précédentes et puisque $v \neq 0$, $f_a(u) = 0$ équivaut à $s + r = 0$.

Ainsi :

$$\text{Ker } f_a = \{te_2 + s(e_1 - e_3) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_2, e_1 - e_3).$$

Si $te_2 + s(e_1 - e_3) = 0$, les coordonnées dans $\mathcal{B}$ donnent $s = t = 0$. Les deux vecteurs sont libres ; $(e_2, e_1 - e_3)$ est donc une base du noyau.

2. Les colonnes de A sont les coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Pour expliciter le calcul du carré, écrivons $V = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A = VL$

et $LV = a - a = 0$. Par associativité, $A^2 = V(LV)L = 0$.

La matrice de $f_a \circ f_a$ est $A^2 = 0$. Sans calcul supplémentaire sur les vecteurs, $f_a \circ f_a$ est donc l'endomorphisme nul.

3. (a) Montrons que la famille est libre. Si $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \nu e'_3 = 0$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont :

$$(a\lambda + \mu, \lambda, -a\lambda - \mu + \nu) = (0, 0, 0).$$

La deuxième coordonnée donne $\lambda = 0$, puis la première $\mu = 0$, puis la troisième $\nu = 0$. Cette famille libre de trois vecteurs dans E , de dimension 3, est une base. La preuve vaut pour tout réel a .

- (b) On a $f_a(e'_1) = f_a^2(e_1) = 0$, $f_a(e'_2) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = 0$ et $f_a(e'_3) = f_a(e_3) = e'_1$. Ainsi :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Méthode 1 — Utilisation de la nouvelle base.

Les matrices A et A' représentent le même endomorphisme dans deux bases, donc elles sont semblables et ont les mêmes valeurs propres. La matrice A' est triangulaire ; ses coefficients diagonaux sont tous nuls. Son unique valeur propre est 0, qui est bien valeur propre puisque son noyau contient notamment le premier vecteur de la base canonique. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Méthode 2 — Utilisation du carré nul.

Si $AU = \lambda U$ avec $U \neq 0$, alors $0 = A^2U = \lambda^2U$, donc $\lambda = 0$. Réciproquement, la

deuxième colonne de A est nulle : le vecteur colonne non nul $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $AU = 0$,

donc 0 est valeur propre. Cela donne à nouveau $\text{Sp}(A) = \{0\}$. La première méthode exploite la forme triangulaire obtenue par changement de base ; la seconde peut s'appliquer dès que l'on connaît une relation simple sur les puissances de la matrice.

Les deux dernières réponses s'en déduisent dans les deux méthodes.

A n'est pas inversible puisque son noyau est de dimension 2. Elle n'est pas diagonalisable : si elle était semblable à une matrice diagonale D , celle-ci aurait uniquement la valeur propre 0, donc $D = 0$ et $A = 0$, ce qui contredit le coefficient $A_{2,1} = 1$.

4. (a) Pour $x \neq 0$, x n'est pas valeur propre de A . Par la définition d'une valeur propre, le système $(A - xI)U = 0$ n'a que la solution nulle. Une matrice carrée à noyau nul est inversible ; ainsi $B(x)$ est inversible.

(b) La matrice A commute avec I , et $A^2 = 0$. Donc :

$$(A - xI)(A + xI) = A^2 - x^2I = -x^2I.$$

Puisque $x^2 > 0$, la matrice $-(A + xI)/x^2$ est un inverse à droite de $A - xI$, donc son inverse. On obtient :

$$(B(x))^{-1} = -\frac{1}{x^2}A - \frac{1}{x}I.$$

(c) Méthode 1 — Binôme de matrices qui commutent.

Les matrices A et $-xI$ commutent, car $A(-xI) = (-xI)A = -xA$. Pour $n \geq 1$, la formule du binôme est donc applicable. Tous les termes contenant A^j avec $j \geq 2$ sont nuls, d'où :

$$(A - xI)^n = (-x)^n I + n(-x)^{n-1}A.$$

Pour inclure aussi $n = 0$ sans ambiguïté, on écrit, puisque $x \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (B(x))^n = (-x)^n \left(I - \frac{n}{x}A \right).$$

Pour $n = 0$, cette expression vaut bien I .

Méthode 2 — Récurrence utilisant le carré nul.

Cette méthode évite de développer un binôme complet et se généralise aux calculs par récurrence. La formule factorisée est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang n , alors :

$$(B(x))^{n+1} = (-x)^n \left(I - \frac{n}{x} A \right) (A - xI).$$

En utilisant $A^2 = 0$, le produit entre parenthèses vaut $A - xI + nA = (n+1)A - xI$.

Ainsi :

$$(B(x))^{n+1} = (-x)^{n+1} \left(I - \frac{n+1}{x} A \right).$$

La formule est donc établie pour tout entier naturel n .

Exercice 3

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des lancers est explicitée dans le sujet adapté ; elle est nécessaire pour attribuer la probabilité 2^{-k} à chaque suite prescrite de k résultats.

1. L'événement $(X = 2)$ est $P_1 F_2$. Par indépendance, $P(X = 2) = P(P_1)P(F_2) = 1/4$.

(a) Les événements $P_1 P_2 F_3$ et $F_1 P_2 F_3$ sont incompatibles et chacun a pour probabilité $1/8$. Ainsi $P(X = 3) = 1/8 + 1/8 = 1/4$.

(b) Pour avoir $X = k$, il faut terminer par $P_{k-1} F_k$ et éviter toute succession pile-face avant le rang k . Avant le dernier face, les résultats sont nécessairement des faces suivies de piles : dès le premier pile apparu, un face ultérieur terminerait immédiatement l'attente.

Si le premier pile est au rang $j \in \{1, \dots, k-1\}$, la suite prescrite est donc :

$$E_{j,k} = F_1 \cdots F_{j-1} P_j \cdots P_{k-1} F_k.$$

Pour $j = 1$, le préfixe de faces est vide. Chaque $E_{j,k}$ donne bien une première succession pile-face aux rangs $k-1, k$. Ces événements sont incompatibles car ils correspondent à des rangs différents du premier pile. Par conséquent :

$$(X = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} E_{j,k}.$$

(c) Chacun des $k-1$ événements précédents prescrit les k lancers, donc a pour probabilité 2^{-k} . L'incompatibilité donne $P(X = k) = (k-1)/2^k$ pour $k \geq 3$. La

même formule vaut pour $k = 2$, puisque $P(X = 2) = 1/4$. Ainsi :

$$\forall k \geq 2, \quad P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

(d) Méthode 1 — Somme de la loi.

Les événements $(X = 0)$ et $(X = k)$ pour $k \geq 2$ forment un système complet. La série géométrique dérivée donne, pour $|q| < 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j q^{j-1} = 1/(1-q)^2.$$

En prenant $q = 1/2$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 1.$$

Par additivité dénombrable, $P(X = 0) = 1 - 1 = 0$.

Méthode 2 — Contrôle par des paires de lancers.

Si $X = 0$, aucune des n paires disjointes $(1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n)$ ne peut être pile-face. Chaque paire a probabilité $3/4$ de ne pas être pile-face. Les paires dépendent de groupes disjoints de lancers indépendants ; elles sont donc indépendantes. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq P(X = 0) \leq (3/4)^n.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc $P(X = 0) = 0$. Cette preuve explique pourquoi l'attente est finie presque sûrement sans utiliser la formule complète de la loi.

2. Le renvoi du PDF à «2(c)» est rectifié en «1(c)», qui contient la loi à retrouver.

(a) Supposons le premier lancer égal à pile. Pour ne pas obtenir pile-face avant le rang k , les lancers $2, \dots, k-1$ doivent tous être pile : le premier face après le premier pile produirait sinon cette succession plus tôt. Le lancer k doit ensuite être face.

Réciproquement, sous P_1 , la réalisation de $P_2 \cdots P_{k-1} F_k$ assure que le premier face survient au rang k et que la première succession cherchée se termine à ce rang. L'équivalence demandée est établie.

(b) Le couple (P_1, F_1) est un système complet, chacun de ses événements ayant probabilité $1/2$. Sous P_1 , la question précédente et l'indépendance donnent $P_{P_1}(X = k) = 2^{-(k-1)}$.

Sous F_1 , aucune succession ne peut commencer au premier lancer. L'expérience à partir du lancer 2 est une suite de lancers indépendants de même loi que la suite initiale, indépendante de F_1 . L'attente d'une première succession s'y termine au rang relatif $k-1$ avec la probabilité $P(X = k-1)$.

La formule des probabilités totales donne donc :

$$P(X = k) = \frac{1}{2} 2^{-(k-1)} + \frac{1}{2} P(X = k-1) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2} P(X = k-1).$$

(c) En multipliant la relation par 2^k , pour $k \geq 3$:

$$u_k = 2^{k-1} P(X = k-1) + 1 = u_{k-1} + 1.$$

La suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique de raison 1, de premier terme $u_2 = 4P(X = 2) = 1$.

Ainsi $u_k = 1 + (k-2) = k-1$, et $P(X = k) = (k-1)/2^k$ pour tout $k \geq 2$, comme en 1(c).

3. Méthode 1 — Somme de la loi.

Comme X est positive ou nulle, l'existence de son espérance équivaut à la convergence de la série de termes $kP(X = k)$. Ici :

$$\sum_{k=2}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Pour $|q| < 1$, la deuxième série géométrique dérivée converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = 2/(1-q)^3.$$

Avec $q = 1/2$, la série précédente converge et vaut $(1/4) \times 2/(1/2)^3 = 4$. Elle est à termes positifs, donc converge absolument. L'espérance existe et $E(X) = 4$. La valeur $X = 0$ apporte un terme nul.

Méthode 2 — Décomposition de l'attente en deux étapes géométriques.

Notons T le rang du premier pile et S le nombre de lancers supplémentaires nécessaires pour obtenir le premier face après ce pile, lorsque ces rangs existent. Pour $j, l \geq 1$, l'événement $(T = j, S = l)$ prescrit $j - 1$ faces, puis l piles, puis un face; il a donc pour probabilité $2^{-(j+l)}$.

Ces événements sont incompatibles. La somme de leurs probabilités vaut

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = 1,$$

par les séries géométriques positives. Ils couvrent donc un événement de probabilité 1 sur lequel les deux rangs existent. On complète la définition de T et S par la valeur 0 sur le complément, de probabilité nulle.

Les lois marginales sont

$$P(T = j) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-(j+l)} = 2^{-j}$$

et

$$P(S = l) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+l)} = 2^{-l}.$$

Ainsi T et S suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $1/2$; elles sont intégrables et $E(T) = E(S) = 2$.

Avant le premier pile, aucune succession pile-face n'est possible; après ce pile, le premier face produit précisément la succession recherchée. Donc $X = T + S$ presque sûrement. Par linéarité de l'espérance, X est intégrable et $E(X) = E(T) + E(S) = 4$. Cette méthode interprète l'attente par deux étapes successives; la première méthode est plus directe lorsque la loi de X est déjà calculée.

Problème

Partie I

1. (a) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable, avec $f'(x) = e^{-x} > 0$. Elle est donc strictement croissante. On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

En particulier, pour $x > 0$, $0 < f(x) < 1$.

(b) Méthode 1 — Signe d'une dérivée.

Posons $q(x) = x - f(x) = x - 1 + e^{-x}$. Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, nulle en 0, et $q'(x) = 1 - e^{-x} > 0$ pour $x > 0$. Elle est strictement croissante, donc $q(x) > 0$ pour $x > 0$. Ainsi $f(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

Méthode 2 — Encadrement d'une intégrale.

Puisque $f(0) = 0$ et $f'(t) = e^{-t}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t} dt$. Pour $x \geq 0$, $e^{-t} \leq 1$ sur $[0, x]$, donc $f(x) \leq \int_0^x 1 dt = x$. Pour $x > 0$, la fonction continue $1 - e^{-t}$ est strictement positive sur $]0, x]$, donc son intégrale est strictement positive : $x - f(x) > 0$. Cette seconde preuve relie directement l'inégalité à une comparaison d'aires.

2. (a) Il s'agit d'établir une identité particulière par récurrence et intégration par parties. Aucune formule générale de développement à un ordre arbitraire n'est supposée connue.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons $J_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$. Cette intégrale existe : l'intégrande est continue entre 0 et x . Si $x < 0$, l'intégrale est orientée de 0 vers x , selon la convention usuelle.

Au rang 0, $J_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$. Ainsi $e^{-x} = 1 - J_0(x)$, qui est bien l'identité demandée.

Pour passer du rang n au rang $n+1$, une intégration par parties, avec les fonctions $t \mapsto (x-t)^{n+1}/(n+1)!$ et $t \mapsto -e^{-t}$, toutes deux C^1 sur le segment concerné, donne :

$$J_{n+1}(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - J_n(x).$$

Cette égalité vaut également pour $x < 0$ par les propriétés des intégrales orientées. Donc $J_n(x) = x^{n+1}/(n+1)! - J_{n+1}(x)$. Supposons l'identité vraie au rang n . La substitution donne :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - J_{n+1}(x) \right),$$

soit :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+2} J_{n+1}(x).$$

L'hérédité est démontrée. Par récurrence, l'égalité demandée est vraie pour tout entier naturel n et tout réel x .

(b) Rectification de l'énoncé : le quantificateur $x \in \mathbb{R}$ du PDF est remplacé par $x \in \mathbb{R}_+$. C'est le domaine de f , et la borne supérieure proposée serait fausse pour $x < 0$.

Pour $x \geq 0$, les fonctions intégrées dans $J_2(x)$ et $J_3(x)$ sont positives ou nulles ; ainsi $J_2(x) \geq 0$ et $J_3(x) \geq 0$.

Au rang $n = 2$, l'identité précédente donne $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - J_2(x)$. Par conséquent :

$$x - f(x) = x - 1 + e^{-x} = \frac{x^2}{2} - J_2(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Au rang $n = 3$, elle donne $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + J_3(x)$, donc :

$$x - f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + J_3(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Les deux bornes sont ainsi établies, y compris pour $x = 0$, où elles sont égales à 0.

Partie II

1. (a) Raisonnons par récurrence. Au rang 0, $u_0 = 1 \in]0, 1]$. Si $u_n \in]0, 1]$, alors $u_n > 0$ et la partie I.1 donne $0 < f(u_n) < 1$. Ainsi $u_{n+1} \in]0, 1]$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour chaque n , $u_n \geq 0$. L'inégalité I.1(b), appliquée à u_n , donne $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$, soit $u_n - u_{n+1} \geq 0$. En fait, comme $u_n > 0$, l'inégalité est stricte.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$. La fonction f étant continue sur cet intervalle, le passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$.

D'après I.1(b), l'égalité $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ n'a lieu qu'en 0. Ainsi $\ell = 0$ et $u_n \rightarrow 0$.

2. (a) Les termes intermédiaires s'annulent dans la somme finie :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n = 1 - u_n.$$

(b) Puisque $u_n \rightarrow 0$, ces sommes partielles tendent vers 1. Par définition de la convergence d'une série, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$$

converge et sa somme vaut 1.

(c) Appliquons I.2(b) à $x = u_n > 0$:

$$\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^3}{6} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{u_n^2}{2}.$$

La division par $u_n^2/2$, strictement positif, donne :

$$1 - \frac{u_n}{3} \leq \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2/2} \leq 1.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, l'encadrement montre que le quotient tend vers 1. Ainsi

$$u_n - u_{n+1} \sim u_n^2/2.$$

(d) Pour rester dans l'étude élémentaire des séries définies par leurs sommes partielles, utilisons directement la borne de la question précédente. Puisque $0 < u_n \leq 1$, elle implique :

$$u_n - u_{n+1} \geq \frac{u_n^2}{2} \left(1 - \frac{u_n}{3}\right) \geq \frac{u_n^2}{3}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$0 \leq \sum_{n=0}^N u_n^2 \leq 3 \sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = 3(1 - u_{N+1}) \leq 3.$$

Les sommes partielles de

$$\sum u_n^2$$

sont croissantes, car ses termes sont positifs, et majorées par 3. Elles convergent donc. La série de terme général u_n^2 est convergente.

Partie III

1. Rectification du domaine : le PDF annonce ϕ sur $\mathbb{R}$ tout en ne la définissant qu'en 0 et pour $x > 0$. Le domaine cohérent retenu est $\mathbb{R}_+$, qui est aussi celui utilisé dans les questions suivantes.

Sur $]0, +\infty[$, ϕ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En 0, puisque $f(0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 = \phi(0).$$

La fonction ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Pour tout $x > 0$, ϕ est continue sur le segment $[0, x]$, donc $\int_0^x \phi(t) dt$ existe. La division par $x > 0$ est licite, donc g est bien définie sur $]0, +\infty[$, et sa valeur en 0 est donnée.

Posons $G(x) = \int_0^x \phi(t) dt$ pour $x \geq 0$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne $G'(x) = \phi(x)$ pour $x > 0$; en particulier, G est continue. Le quotient $g(x) = G(x)/x$ est donc continu sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour $t > 0$, I.2(b) s'écrit $t^2/2 - t^3/6 \leq t - f(t) \leq t^2/2$. Divisons par t puis réarrangeons :

$$1 - \frac{t}{2} \leq \phi(t) \leq 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}.$$

Cette inégalité vaut aussi en $t = 0$, avec égalité. Pour $x > 0$, intégrons-la sur $[0, x]$:

$$x - \frac{x^2}{4} \leq G(x) \leq x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18}.$$

La division par $x > 0$ donne l'encadrement demandé :

$$1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}.$$

(c) Les deux bornes précédentes tendent vers 1 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Donc $g(x) \rightarrow 1 = g(0)$ et g est continue en 0.

Pour la dérivée à droite, soustrayons 1 puis divisons par $x > 0$:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x} \leq -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}.$$

Les deux bornes tendent vers $-1/4$. La dérivée à droite existe donc et $g'(0) = -1/4$. La tangente à droite à l'origine du domaine a pour équation $y = 1 - x/4$.

2. (a) Pour $t \geq 1$, $0 < 1 - e^{-t} \leq 1$, donc $0 \leq \phi(t) \leq 1/t$. Pour $x > 1$, intégrons entre 1 et x :

$$0 \leq \int_1^x \phi(t) dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

Cela établit notamment la majoration demandée.

(b) La fonction ϕ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par Chasles, pour $x > 1$:

$$0 \leq g(x) = \frac{1}{x} \left(G(1) + \int_1^x \phi(t) dt \right) \leq \frac{G(1)}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

Le réel $G(1)$ est fini par continuité de ϕ sur $[0, 1]$. Les deux termes de droite tendent vers 0, le second par croissances comparées. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3. (a) Sur $]0, +\infty[$, G est dérivable et $G' = \phi$. En dérivant le quotient, on obtient :

$$g'(x) = \frac{x\phi(x) - G(x)}{x^2}.$$

On pose donc $h(x) = x\phi(x) - G(x) = 1 - e^{-x} - \int_0^x \phi(t) dt$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = h(x)/x^2$.

(b) À partir de la dernière expression de h , le théorème fondamental et la dérivation de l'exponentielle donnent :

$$h'(x) = e^{-x} - \phi(x) = e^{-x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

(c) La fonction k est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée est :

$$k'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Elle est strictement négative pour $x > 0$. Par conséquent, k est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $k(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -1$, puisque $(x+1)e^{-x} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

x	0		$+\infty$
$k'(x)$	0	—	
$k(x)$	0	$\searrow$	-1

(d) D'après 3(c), $k(0) = 0$ et $k(x) < 0$ pour $x > 0$. La relation $h'(x) = k(x)/x$ donne donc $h'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$: h y est strictement décroissante.

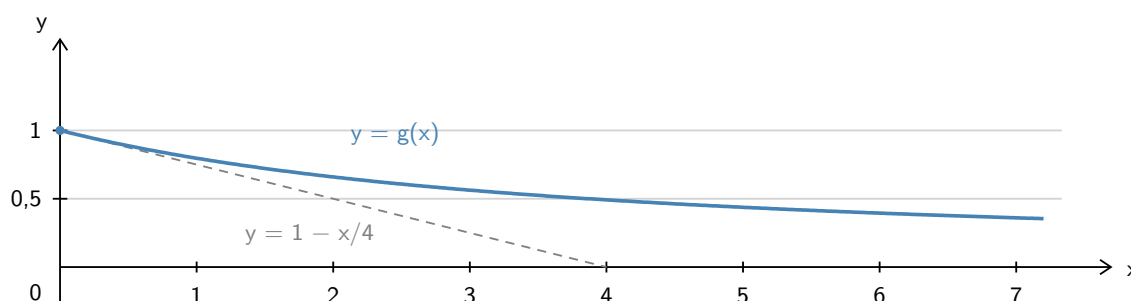
Pour déterminer son signe, il faut aussi sa limite en 0. Puisque $f(x) \rightarrow 0$ et $G(x) \rightarrow G(0) = 0$, $h(x) = f(x) - G(x) \rightarrow 0$. On peut donc prolonger h continûment en posant $h(0) = 0$. Sa stricte décroissance donne $h(x) < 0$ pour $x > 0$.

Enfin $g'(x) = h(x)/x^2 < 0$ pour $x > 0$, car le dénominateur est strictement positif. La fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et, par continuité en 0, sur $[0, +\infty[$.

(e) Les résultats précédents donnent le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-1/4$ à droite	$-$
$g(x)$	1	0

La courbe part de $(0, 1)$ avec une tangente de pente $-1/4$. Elle reste strictement au-dessus de l'axe des abscisses, car $g(x)$ est une moyenne intégrale d'une fonction positive, et tend vers cet axe en $+\infty$. La borne III.1(b) la place au-dessus de la tangente $y = 1 - x/4$. Le dessin ci-dessous représente la courbe calculée à partir de sa définition ; les unités des deux axes sont identiques. Le trait gris représente la tangente, et la courbe se poursuit vers son asymptote horizontale $y = 0$.



Même unité sur les deux axes ; la courbe se poursuit vers $y = 0$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2(a) : indication que $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, conformément au commentaire du programme sur la nature topologique du domaine.

- Exercice 1, 2(b) : précision de la méthode par hessienne et signes des valeurs propres, en conservant la demande de minimum relatif.
- Exercice 2, préambule : identification par les coordonnées à $\mathbb{R}^3$, pour travailler dans un espace concret sans changer les données.
- Exercice 3, préambule : indépendance des lancers explicitée, hypothèse nécessaire au modèle utilisé par toutes les questions.
- Exercice 3, 2 : renvoi « 2(c) » rectifié en « 1(c) ».
- Problème I.2(b) : domaine rectifié en $\mathbb{R}_+$; le domaine $\mathbb{R}$ imprimé est incompatible avec la définition de f et avec la borne supérieure.
- Problème III.1 : domaine de ϕ rectifié de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_+$ pour correspondre à sa définition et à toutes ses utilisations.
- Problème III.1(c) : précision que la dérivée en 0 est une dérivée à droite, le domaine étant $\mathbb{R}_+$.