



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1997

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x - n \ln(x).$$

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
1. (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 2. (a) Montrer que $\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < e$.
 2. (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
 2. (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 2. (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
 3. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 3. (b) Calculer $f_n(n \ln(n))$, puis montrer que $\forall n \geq 3, \quad n \ln(n) < v_n$.
 3. (c) Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x - 2 \ln(x)$. Étudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n > 2 \ln(n)$.

3. (d) En déduire le signe de $f_n(2n \ln(n))$, puis établir que $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
3. (e) Montrer enfin que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$, où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
2. (b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$.
3. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
3. (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ .
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.
4. (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \frac{\ell}{n}$.

4. (b) En déduire une contradiction avec la troisième question. On pourra minorer les sommes partielles par un multiple d'une somme harmonique et établir directement que ces sommes harmoniques sont non bornées.
5. Donner la valeur de ℓ et en déduire, en fonction de p , la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 3

I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.

On définit alors les matrices suivantes, par des sommes finies :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k, \quad \text{avec la convention } M^0 = I,$$

$$\ln(I + M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k.$$

Pour la matrice nulle, on pose également $\exp(0) = I$ et $\ln(I) = 0$. Ces notations désignent ici uniquement les expressions finies ci-dessus ; aucune propriété générale d'une exponentielle ou d'un logarithme de matrice n'est supposée connue.

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.
1. (b) Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
1. (c) Montrer que toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E .

2. (a) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. (b) Exprimer $\exp(A)$ et $\ln(I + A)$ en fonction de I et de A .
3. Montrer que $\ln[\exp(A)] = A$.
4. (a) Vérifier que $\ln(I + A)$ appartient à E .
4. (b) Montrer que $\exp[\ln(I + A)] = I + A$.
5. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad \exp(mA) = [\exp(A)]^m$.
6. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et que son inverse est $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.
7. Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$?

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I

On effectue $2n$ tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne. Les tirages sont indépendants et chaque boule est équiprobable à chaque tirage.

On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que $N(\Omega) = \llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

2. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$.

La notation A_n^k désigne le nombre de listes ordonnées de k éléments distincts choisis parmi n éléments. Pour guider ce comptage, on pourra compter successivement les choix de la première entrée, puis de la deuxième, et ainsi de suite. On convient que $A_n^0 = 1$.

3. (a) Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(N = k) = P(N > k-1) - P(N > k).$$

3. (b) Calculer $P(N = n+1)$, puis en déduire la loi de N .

4. Montrer que l'espérance $E(N)$ de la variable aléatoire N est

$$E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Partie II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, et de fonction de répartition F . On suppose de plus f continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)] dt - xP(X > x).$$

2. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt$ converge.

2. (a) Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. (b) Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.

2. (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq xP(X > x) \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt.$

2. (d) En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t) dt = 0.$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} xP(X > x),$ puis montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt.$

Partie III

On considère la fonction F_n définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n .

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

2. (b) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)I_k$, puis donner la valeur de I_k .

3. En déduire, en utilisant la partie II, que T_n a une espérance et que $E(T_n) = E(N).$

Partie VI

On considère la déclaration de fonction suivante, rédigée en Python. Ses arguments p et q sont des entiers. La commande `range(1, q)` parcourt les entiers de 1 à $q - 1$; elle ne parcourt aucun entier lorsque $q = 0$ ou $q = 1$. `print` affiche un message et `return` renvoie la valeur calculée. Aucun module n'est nécessaire.

Python

```
def f(p, q):
    if p <= 0 or q < 0:
        print("valeurs incorrectes")
    else:
        z = 1.0
        for j in range(1, q):
            z = z * (1 - j / p)
        return z
```

1. Montrer que, si p est un entier naturel non nul et si q est un entier naturel, alors

$f(p, q) = \frac{A_p^q}{p^q}$, où A_p^q est le nombre de listes ordonnées de q éléments distincts d'un ensemble à p éléments. On convient que $A_p^0 = 1$ et que $A_p^q = 0$ pour $q > p$. On pourra compter les choix successifs pour $1 \leq q \leq p$ et examiner séparément $q = 0$ et $q > p$. L'égalité concerne la valeur mathématique du calcul, indépendamment des arrondis numériques.

2. Utiliser cette déclaration pour écrire un algorithme en Python donnant la valeur commune de $E(N)$ et $E(T_n)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier. La commande `input("n = ")` lit la saisie sous forme de texte et `int` la convertit en entier. On pourra utiliser `range(0, n + 1)` pour parcourir les entiers de 0 à n inclus.