



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1997

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. (a) La fonction f_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est

$$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}.$$

Le dénominateur est positif. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$ et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

La seconde limite résulte de $f_n(x) = x(1 - n \ln(x)/x)$ et de $\ln(x)/x \rightarrow 0$. Le minimum est $f_n(n) = n(1 - \ln(n))$.

x	0^+	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$	$n(1 - \ln(n))$	$+\infty$

La lecture de la dernière ligne se fait avec décroissance jusqu'à n , puis croissance. Pour $n = 1, 2$, le minimum est positif; pour $n \geq 3$, il est négatif.

1. (b) Pour $n \geq 3$, $n > e$ et $f_n(n) < 0$. Sur $]0, n]$, la fonction est continue, strictement décroissante, de limite $+\infty$ en 0, et de valeur négative en n . Le théorème de la bijection donne exactement une racine u_n dans $]0, n[$.

Sur $[n, +\infty[$, elle est continue, strictement croissante, négative en n et de limite $+\infty$. Il y a exactement une racine v_n dans $]n, +\infty[$. Ainsi $0 < u_n < n < v_n$, et ce sont les deux seules solutions positives.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

2. (a) On localise la petite racine sur l'intervalle de décroissance. Pour $n \geq 3$,

$$f_n(1) = 1 > 0, \quad f_n(e) = e - n < 0, \quad 1 < e < n.$$

La continuité et la stricte décroissance sur $[1, e]$ donnent $1 < u_n < e$.

2. (b) L'équation qui définit u_{n+1} est $u_{n+1} = (n+1) \ln(u_{n+1})$. Par conséquent,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) > 0.$$

Les deux nombres u_n et u_{n+1} appartiennent à $]1, e[\subset]0, n[$, intervalle de stricte décroissance de f_n . Puisque $f_n(u_n) = 0 < f_n(u_{n+1})$, on obtient $u_{n+1} < u_n$. La suite est strictement décroissante.

2. (c) La suite est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel $L \geq 1$.
L'équation $f_n(u_n) = 0$ et l'encadrement précédent donnent

$$0 < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}.$$

Ainsi $\ln(u_n) \rightarrow 0$. Par continuité du logarithme en $L > 0$, $\ln(L) = 0$, donc $L = 1$. On conclut que $u_n \rightarrow 1$.

2. (d) Méthode 1 — Taux d'accroissement du logarithme.

La dérivabilité de $\ln$ en 1, avec $\ln'(1) = 1$, donne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = 1.$$

Comme $u_n \rightarrow 1$ et $u_n > 1$, on a $\ln(u_n)/(u_n - 1) \rightarrow 1$. Or $\ln(u_n) = u_n/n$, d'où

$$n(u_n - 1) = u_n \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} \rightarrow 1.$$

Par définition de l'équivalence, $u_n - 1 \sim 1/n$.

Méthode 2 — Encadrement par intégration.

Pour $1 \leq t \leq u_n$, $1/u_n \leq 1/t \leq 1$. En intégrant sur $[1, u_n]$,

$$\frac{u_n - 1}{u_n} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1.$$

La division par $u_n - 1 > 0$ donne $1/u_n \leq \ln(u_n)/(u_n - 1) \leq 1$. Le théorème d'encadrement fournit la limite 1. En remplaçant $\ln(u_n)$ par u_n/n dans les deux inégalités, on obtient aussi

$$u_n \leq n(u_n - 1) \leq u_n^2.$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc $u_n - 1 \sim 1/n$. La première méthode reconnaît une limite de cours ; la seconde produit un encadrement quantitatif réutilisable.

3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.

3. (a) Comme $v_n > n$ et $n \rightarrow +\infty$, $v_n \rightarrow +\infty$ par comparaison.

3. (b) Pour $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$, donc $n \ln(n) > n$. Les règles du logarithme donnent

$$f_n(n \ln(n)) = n \ln(n) - n(\ln(n) + \ln(\ln(n))) = -n \ln(\ln(n)) < 0.$$

Sur $[n, +\infty[$, f_n est strictement croissante et s'annule en v_n . La négativité précédente implique $n \ln(n) < v_n$.

3. (c) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

Elle décroît sur $]0, 2]$, puis croît sur $[2, +\infty[$, avec $g(x) \rightarrow +\infty$ aux deux extrémités. Son minimum est

$$g(2) = 2 - 2 \ln(2) > 0,$$

car $\ln(2) < 1$. Ainsi $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, $n > 2 \ln(n)$.

3. (d) Pour $n \geq 3$, on a $2 \ln(n) > 0$ et

$$\begin{aligned} f_n(2n \ln(n)) &= 2n \ln(n) - n(\ln(n) + \ln(2 \ln(n))) \\ &= n \ln\left(\frac{n}{2 \ln(n)}\right) > 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de la question précédente. De plus, $2n \ln(n) > n$. La stricte croissance de f_n sur $[n, +\infty[$ donne donc $v_n < 2n \ln(n)$. Avec 3. (b), on obtient

$$n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n).$$

3. (e) Question adaptée au programme actuel. Le résultat imprimé $\ln(v_n) \sim n \ln(n)$ est incompatible avec l'encadrement de 3. (d). La demande corrigée est $v_n \sim n \ln(n)$; on établit aussi le comportement de $\ln(v_n)$ pour justifier le passage.

Les trois termes de l'encadrement de 3. (d) sont strictement positifs. Par croissance du logarithme,

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \ln(2).$$

En divisant par $\ln(n) > 0$, puis en utilisant $\ln(\ln(n))/\ln(n) \rightarrow 0$, on obtient $\ln(v_n)/\ln(n) \rightarrow 1$. La limite utilisée est la croissance comparée $\ln(t)/t \rightarrow 0$ appliquée à $t = \ln(n) \rightarrow +\infty$; on n'a pas composé abusivement une équivalence avec le logarithme.

Enfin, l'équation $f_n(v_n) = 0$ donne $v_n = n \ln(v_n)$, donc

$$\frac{v_n}{n \ln(n)} = \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \rightarrow 1.$$

Ainsi $v_n \sim n \ln(n)$ et $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

Exercice 2

On utilise, pour $n \geq 1$, la formule

$$u_n = \frac{n!p!}{(n+p)!} > 0.$$

1. Si $p = 0$, $u_n = 1$, donc $S_n = n \rightarrow +\infty$: la série diverge.

Si $p = 1$, $u_n = 1/(n+1)$. Pour $k \geq 1$ et $x \in [k+1, k+2]$, $1/x \leq 1/(k+1)$. Par intégration et sommation,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x} = \ln(n+2) - \ln(2) \rightarrow +\infty.$$

La série diverge encore. Cette preuve établit directement la non-bornitude des sommes partielles, sans faire appel à un critère de comparaison de séries extérieur au cadre probabiliste.

2. (a) Pour $n \geq 0$, les indices $n + 1$ et $n + 2$ sont bien dans le domaine de définition de u .
Les factorielles donnent

$$\begin{aligned}(n + p + 2)u_{n+2} &= (n + p + 2) \frac{(n + 2)!p!}{(n + p + 2)!} \\ &= \frac{(n + 2)!p!}{(n + p + 1)!} = (n + 2)u_{n+1}.\end{aligned}$$

L'identité demandée est donc vérifiée.

2. (b) Méthode 1 — Récurrence imposée.

Pour $n = 1$, $S_1 = u_1 = 1/(p + 1)$ et $u_2 = 2/((p + 1)(p + 2))$. Ainsi,

$$\frac{1 - (p + 2)u_2}{p - 1} = \frac{1 - 2/(p + 1)}{p - 1} = \frac{1}{p + 1} = S_1.$$

Supposons la formule vraie au rang $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{1 - (n + p + 1)u_{n+1} + (p - 1)u_{n+1}}{p - 1} \\ &= \frac{1 - (n + 2)u_{n+1}}{p - 1} \\ &= \frac{1 - (n + p + 2)u_{n+2}}{p - 1},\end{aligned}$$

la dernière ligne utilisant 2. (a). C'est la formule au rang $n + 1$. Par récurrence,

$$S_n = \frac{1 - (n + p + 1)u_{n+1}}{p - 1} \quad (n \geq 1).$$

Méthode 2 — Somme télescopique.

La relation de 2. (a), avec l'indice $k - 1$, donne $(k + p + 1)u_{k+1} = (k + 1)u_k$ pour $k \geq 1$.
Donc

$$(k + p)u_k - (k + p + 1)u_{k+1} = (p - 1)u_k.$$

On somme cette égalité de $k = 1$ à n . Les termes intermédiaires se simplifient :

$$(p - 1)S_n = (p + 1)u_1 - (n + p + 1)u_{n+1} = 1 - (n + p + 1)u_{n+1}.$$

Comme $p - 1 > 0$, la division donne la formule. La récurrence vérifie une expression proposée ; la seconde méthode explique l'origine de cette expression.

3. (a) La formule de 2. (a) fournit, pour $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = (n + p + 1)u_{n+1} = (n + 1)u_n.$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n = (1 - p)u_n < 0$, puisque $p \geq 2$ et $u_n > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante.

3. (b) Comme $v_n = (n + p)u_n > 0$, la suite est minorée par 0. Le théorème de la limite monotone montre qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

3. (c) On réécrit 2. (b) sous la forme $S_n = (1 - v_{n+1})/(p - 1)$. Puisque $v_{n+1} \rightarrow \ell$, on a

$$S_n \rightarrow \frac{1 - \ell}{p - 1}.$$

Par définition de la convergence d'une série, la série de terme général u_n , à partir de $n = 1$, converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1 - \ell}{p - 1}.$$

4. On suppose ici $\ell \neq 0$. D'après 3. (b), on a donc $\ell > 0$.

4. (a) Puisque $u_n = v_n/(n + p)$,

$$\frac{u_n}{\ell/n} = \frac{v_n}{\ell} \frac{n}{n + p} \rightarrow 1 \times 1 = 1.$$

Les divisions sont légitimes car $\ell > 0$ et $n + p > 0$. On a donc $u_n \sim \ell/n$.

4. (b) Question adaptée au programme actuel : l'indication sur les sommes partielles permet de donner une contradiction élémentaire, sans supposer connu un chapitre de comparaison des séries hors probabilités.

L'équivalence précédente, avec $\ell > 0$, donne un entier $n_0 \geq 1$ tel que $u_n \geq \ell/(2n)$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $m \geq n_0$,

$$S_m \geq \sum_{n=n_0}^m u_n \geq \frac{\ell}{2} \sum_{n=n_0}^m \frac{1}{n} \geq \frac{\ell}{2} \int_{n_0}^{m+1} \frac{dx}{x}.$$

La dernière inégalité vient de $1/x \leq 1/n$ sur $[n, n + 1]$. Le dernier membre est $\frac{\ell}{2}(\ln(m + 1) - \ln(n_0))$, qui tend vers $+\infty$. Cela contredit la convergence des sommes partielles établie en 3. (c). L'hypothèse $\ell \neq 0$ est donc impossible.

5. On a nécessairement $\ell = 0$. En revenant à 3. (c),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{1}{p-1} \quad (p \geq 2).$$

Le point de départ $n = 1$ est essentiel : inclure $n = 0$ ajouterait le terme 1.

Exercice 3

Les symboles $\exp$ et $\ln$ sont les expressions polynomiales finies définies par l'énoncé. On ne leur attribue aucune propriété générale de fonctions matricielles. Question adaptée au programme actuel, préambule : les valeurs $\exp(0) = I$ et $\ln(I) = 0$ permettent de traiter les matrices nulles et tous les cas où un carré s'annule déjà.

1. (a) Chaque matrice de E s'écrit de manière unique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

L'ensemble contient la matrice nulle. Si $A, B \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les coefficients diagonaux et ceux situés sous la diagonale de $\alpha A + \beta B$ restent nuls : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En notant E_{ij} la matrice dont le seul coefficient non nul est 1 en position (i, j) , on a $A = aE_{12} + bE_{13} + cE_{23}$. Les trois matrices E_{12}, E_{13}, E_{23} sont génératrices et libres, car une combinaison nulle impose successivement la nullité de ses trois coefficients. Elles constituent une base de E ; par conséquent $\dim(E) = 3$.

1. (b) La première colonne de toute matrice $A \in E$ est nulle. Pour le vecteur non nul $e_1 = {}^t(1, 0, 0)$, on a donc $Ae_1 = 0$. Si A était inversible, on aurait $e_1 = A^{-1}0 = 0$, contradiction. Aucune matrice de E n'est inversible.
1. (c) On commence par déterminer les seules valeurs propres possibles, sans déterminant. Soient λ une valeur propre et $X = {}^t(x, y, z) \neq 0$ un vecteur propre. L'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit

$$ay + bz = \lambda x, \quad cz = \lambda y, \quad 0 = \lambda z.$$

Si $\lambda \neq 0$, la dernière équation donne $z = 0$, puis la deuxième donne $y = 0$, et la première $x = 0$, contradiction. Ainsi toute valeur propre vaut 0, qui est effectivement valeur propre puisque $Ae_1 = 0$.

Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de A , donc sont tous nuls. Ainsi $D = 0$ et $A = 0$. Toute matrice non nulle de E est donc non diagonalisable.

2. (a) Avec les notations de 1. (a), le produit matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0.$$

En effet, dans A^2 , le seul produit potentiellement non nul est celui de la position (1, 2) de A avec la position (2, 3) de A , soit ac en position (1, 3). La multiplication suivante est nulle, car la troisième ligne de A est nulle. Par conséquent,

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^k = 0 \quad (k \geq 3).$$

2. (b) Si $A^2 \neq 0$, les sommes définissant les deux notations s'arrêtent à la puissance 2. Si $A^2 = 0$ et $A \neq 0$, elles s'arrêtent à la puissance 1, et les mêmes expressions restent valables. Le cas $A = 0$ est couvert par les conventions du préambule. Dans tous les cas,

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2, \quad \ln(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2.$$

3. Posons $C = A + \frac{1}{2}A^2$. Cette matrice appartient à E , car A et A^2 y appartiennent. On peut donc appliquer les formules de 2. (b) à C . En utilisant $A^3 = 0$, on calcule

$$C^2 = A^2 + A^3 + \frac{1}{4}A^4 = A^2.$$

Comme $\exp(A) = I + C$, le logarithme demandé est bien défini par l'énoncé et

$$\ln[\exp(A)] = \ln(I + C) = C - \frac{1}{2}C^2 = A.$$

4. (a) D'après 2. (a), $A^2 \in E$. L'espace E est stable par combinaison linéaire, donc $\ln(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 \in E$.

4. (b) Posons $D = A - \frac{1}{2}A^2$. On vient de vérifier que $D \in E$. De plus,

$$D^2 = A^2 - A^3 + \frac{1}{4}A^4 = A^2.$$

La formule de 2. (b), appliquée à D , donne

$$\exp[\ln(I + A)] = I + D + \frac{1}{2}D^2 = I + A.$$

5. Méthode 1 — Récurrence sur m .

On veut établir $[\exp(A)]^m = I + mA + \frac{m^2}{2}A^2$. Pour $m = 0$, les deux membres valent I .

Si l'identité est vraie pour un entier $m \geq 0$, on multiplie par $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2$.

Les termes de degré au moins 3 en A sont nuls, d'où

$$\begin{aligned} [\exp(A)]^{m+1} &= I + (m+1)A + \left(\frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{2}\right)A^2 \\ &= I + (m+1)A + \frac{(m+1)^2}{2}A^2. \end{aligned}$$

La récurrence est démontrée. Or $mA \in E$, donc $\exp(mA) = I + mA + \frac{m^2}{2}A^2$. On conclut que $\exp(mA) = [\exp(A)]^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Binôme de matrices qui commutent.

Posons $C = A + \frac{1}{2}A^2$. On a $\exp(A) = I + C$, $C^2 = A^2$ et $C^3 = 0$. Les matrices I et C commutent, donc la formule du binôme s'applique. Pour $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} (I + C)^m &= I + mC + \binom{m}{2}C^2 \\ &= I + mA + \left(\frac{m}{2} + \frac{m(m-1)}{2}\right)A^2 \\ &= I + mA + \frac{m^2}{2}A^2 = \exp(mA). \end{aligned}$$

Les cas $m = 0$ et $m = 1$ se vérifient directement. La récurrence utilise seulement le produit matriciel ; le binôme exploite l'annulation des puissances élevées pour obtenir l'expression en une étape.

6. La matrice $-A$ appartient à E , donc $\exp(-A) = I - A + \frac{1}{2}A^2$. En multipliant,

$$\begin{aligned}\exp(A) \exp(-A) &= \left(I + A + \frac{1}{2}A^2\right) \left(I - A + \frac{1}{2}A^2\right) \\ &= I + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) A^2 = I,\end{aligned}$$

car les termes de degré au moins 3 sont nuls et ceux de degré 1 se compensent. Ces deux matrices sont des polynômes en A , donc elles commutent : le produit dans l'autre ordre vaut également I . Ainsi $\exp(A)$ est inversible et $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.

7. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $AB = afE_{13}$ et $BA = dcE_{13}$. Tout produit de trois matrices de E est nul : le produit de deux est un multiple de E_{13} , et $E_{13}C = CE_{13} = 0$ pour chaque $C \in E$.

Comme $A + B \in E$,

$$\exp(A + B) = I + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2).$$

En développant le produit et en supprimant les produits de trois facteurs ou davantage,

$$\exp(A) \exp(B) = I + A + B + \frac{1}{2}A^2 + AB + \frac{1}{2}B^2.$$

La différence du second membre et du premier est $\frac{1}{2}(AB - BA)$. On obtient donc l'équivalence

$$\boxed{\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \iff AB = BA.}$$

En termes des coefficients, la condition est $af = dc$. Elle est à la fois nécessaire et suffisante.

Problème

Partie I

1. Le premier tirage ne peut pas répéter un tirage antérieur, donc $N \geq 2$. Parmi les $n + 1$ premiers tirages, on ne peut obtenir $n + 1$ numéros tous distincts puisque l'urne ne comporte que n numéros. Ainsi $N \leq n + 1 \leq 2n$ et N est toujours défini au cours de l'expérience.

Réciproquement, pour $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, on peut tirer successivement les numéros $1, 2, \dots, k - 1$, puis de nouveau 1. Cette suite de tirages a une probabilité strictement positive et sa première répétition est au rang k . On peut ensuite compléter arbitrairement jusqu'à $2n$ tirages. Ainsi $N(\Omega) = \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$.

2. Question adaptée au programme actuel : la notion d'arrangement est explicitée et le comptage est guidé, sans présupposer un chapitre général de dénombrement. Le préambule explicite aussi l'indépendance et l'uniformité usuelles des tirages au hasard avec remise.

Méthode 1 — Comptage des listes équiprobables.

L'événement $\{N > k\}$ signifie que les k premiers numéros sont tous distincts. Les n^k listes de k résultats sont équiprobables, chacune de probabilité $1/n^k$, par indépendance et uniformité des tirages.

Pour une liste sans répétition, il y a n choix pour le premier numéro, $n - 1$ pour le deuxième, puis $n - j + 1$ pour le j -ième. Ainsi, pour $1 \leq k \leq n$,

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

En divisant le nombre de listes favorables par le nombre total, $P(N > k) = A_n^k/n^k$.

Méthode 2 — Probabilités composées.

Après j tirages distincts, $n - j$ numéros restent encore jamais obtenus.

Conditionnellement à n'importe quelle liste de ces j résultats, le prochain tirage, indépendant et uniforme, est nouveau avec probabilité $(n - j)/n$. Cette valeur ne dépendant pas de la liste, elle est aussi la probabilité conditionnelle sachant seulement que les j tirages sont distincts.

La formule des probabilités composées donne donc

$$P(N > k) = 1 \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Tous les conditionnements sont faits par des événements de probabilité positive puisque $k \leq n$. La première méthode compte des résultats possibles ; la seconde décrit l'apparition progressive d'une répétition.

3. (a) Pour $2 \leq k \leq n$, les événements $\{N = k\}$ et $\{N > k\}$ sont disjoints et leur réunion est $\{N > k - 1\}$. L'additivité donne

$$P(N = k) = P(N > k - 1) - P(N > k).$$

3. (b) Comme $N \leq n + 1$, l'événement $\{N = n + 1\}$ est $\{N > n\}$. La question 2 donne

$$P(N = n + 1) = \frac{n!}{n^n}.$$

Pour $2 \leq k \leq n$, on utilise $A_n^k = (n - k + 1)A_n^{k-1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{A_n^k}{n^k} \\ &= \frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} \left(1 - \frac{n - k + 1}{n} \right) \\ &= \frac{(k - 1)A_n^{k-1}}{n^k}. \end{aligned}$$

Cette expression reste valable pour $k = n + 1$ puisqu'elle vaut alors $n n! / n^{n+1} = n! / n^n$.

La loi complète est donc

$$P(N = k) = \begin{cases} \frac{(k - 1)n!}{n^k(n - k + 1)!} & \text{si } 2 \leq k \leq n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme des probabilités est 1 : en sommant les différences de 3. (a), puis en ajoutant $P(N > n)$, il reste $P(N > 1) = 1$.

4. La variable N est bornée, donc son espérance existe.

Méthode 1 — Somme télescopique de la loi.

Notons $a_k = P(N > k)$ pour $0 \leq k \leq n+1$. On a $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 0$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $P(N = k) = a_{k-1} - a_k$. D'où

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{k=2}^{n+1} k(a_{k-1} - a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (j+1)a_j - \sum_{j=2}^n ja_j \\ &= 2a_1 + \sum_{j=2}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_j. \end{aligned}$$

Le résultat de 2, complété par $A_n^0 = 1$, donne

$$E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Méthode 2 — Somme d'indicatrices.

Pour une valeur $N = r \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, exactement les indices $k = 0, \dots, r-1$ vérifient $N > k$. On a donc l'égalité de variables

$$N = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{N > k\}}.$$

Il s'agit d'une somme finie de variables bornées. Par linéarité de l'espérance et puisque l'espérance d'une indicatrice est la probabilité de l'événement correspondant,

$$E(N) = \sum_{k=0}^n P(N > k) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}.$$

La première preuve utilise directement la loi ; la seconde interprète la durée comme le nombre de rangs franchis avant l'arrêt, sans supposer connue une formule générale d'espérance par les probabilités de queue.

Partie II

1. Pour $t \geq 0$, $F(t) = \int_0^t f(u) du$: la densité est nulle sur les réels négatifs et X n'a pas d'atome en 0. En particulier $F(0) = 0$. La continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ permet de dériver cette primitive sur cet intervalle, avec dérivée à droite au point 0.

Pour $x \geq 0$, on intègre par parties sur le segment $[0, x]$, avec t et la primitive $F(t) - 1$ de $f(t)$. Les fonctions sont de classe C^1 sur ce segment au sens usuel aux extrémités. Il vient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= [t(F(t) - 1)]_0^x - \int_0^x (F(t) - 1) dt \\ &= x(F(x) - 1) + \int_0^x [1 - F(t)] dt. \end{aligned}$$

Puisque $1 - F(x) = P(X > x)$, on obtient

$$\varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)] dt - xP(X > x).$$

L'identité vaut aussi en $x = 0$, où tous les termes sont nuls.

2. Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse porte sur $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt$, et non sur une intégrale à borne supérieure finie, automatiquement définie. On note L sa valeur, finie et positive ou nulle.

2. (a) La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$\varphi'(x) = xf(x) \geq 0 \quad (x > 0),$$

et la même formule pour la dérivée à droite en 0. Ainsi φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. (b) Pour $x \geq 0$, la positivité de f , puis l'identité de 1, donnent

$$0 \leq \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)] dt - xP(X > x) \leq \int_0^x [1 - F(t)] dt \leq L.$$

La fonction φ est donc croissante et majorée. Elle possède une limite finie en $+\infty$; par définition, $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge.

Sur les réels négatifs, $tf(t) = 0$, et sur les réels positifs il est positif. L'intégrale de $|tf(t)|$ est donc égale à cette intégrale finie. Ainsi X admet une espérance et

$$E(X) = \int_0^{+\infty} tf(t) dt.$$

2. (c) Pour $x \geq 0$, $P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$. Pour $b \geq x$, l'inégalité $0 \leq xf(t) \leq tf(t)$ sur $[x, b]$ donne

$$0 \leq x \int_x^b f(t) dt \leq \int_x^b tf(t) dt.$$

Les deux intégrales ont des limites finies lorsque $b \rightarrow +\infty$, car f est une densité et l'espérance existe d'après 2. (b). On peut donc passer à la limite dans ces inégalités :

$$0 \leq xP(X > x) \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt.$$

Le cas $x = 0$ est inclus, sans division par x .

2. (d) Question adaptée au programme actuel : l'événement incomplet dans la demande de limite est restitué sous la forme $\{X > x\}$, cohérente avec les questions précédentes.

Par la relation de Chasles appliquée à l'intégrale convergente,

$$\int_x^{+\infty} tf(t) dt = E(X) - \int_0^x tf(t) dt = E(X) - \varphi(x) \rightarrow 0.$$

L'encadrement de 2. (c) fournit alors $xP(X > x) \rightarrow 0$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'identité établie en 1, on obtient

$$E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt.$$

Le résultat a été établi dans le cadre précis de l'énoncé, sans échange d'intégrales ni théorème de convergence sous le signe intégral.

Partie III

1. Pour $x \geq 0$, posons $h_n(x) = (1 + x/n)^n e^{-x}$. Cette fonction est positive et de classe C^1 , et

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= (1 + x/n)^{n-1} e^{-x} - (1 + x/n)^n e^{-x} \\ &= -\frac{x}{n} (1 + x/n)^{n-1} e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$F'_n(x) = \frac{x}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} e^{-x} \geq 0.$$

Sur $] -\infty, 0[$, F_n est constante égale à 0. En 0, $F_n(0) = 0$ et la limite à droite est $1 - 1 = 0$, donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est croissante sur chacun des deux intervalles et les valeurs se raccordent ; elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin, $F_n(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$, et $h_n(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ par croissance comparée entre exponentielle et polynôme, donc $F_n(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$.

Ces propriétés montrent que F_n est une fonction de répartition. Elle est de classe C^1 en dehors éventuellement de 0, et une densité correspondante est

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Cette densité est positive, continue en 0 où sa valeur est nulle, et possède des limites finies de chaque côté de tout réel. Sa normalisation peut aussi se vérifier sur $[0, b]$ par

$\int_0^b f_n(x) dx = F_n(b) - F_n(0) \rightarrow 1$. Ainsi il existe bien une variable à densité T_n de fonction de répartition F_n , et elle satisfait les hypothèses de la partie II.

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k e^{-x}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Elle n'a donc aucune difficulté d'intégration sur un segment.

Les croissances comparées donnent $x^k e^{-x/2} \rightarrow 0$. Il existe donc $a > 0$ tel que, pour $x \geq a$,

$$0 \leq x^k e^{-x} = (x^k e^{-x/2}) e^{-x/2} \leq e^{-x/2}.$$

L'intégrale de $e^{-x/2}$ sur $[a, +\infty[$ converge, avec valeur $2e^{-a/2}$. Par comparaison des intégrales de fonctions positives, I_k converge. La justification vaut aussi pour $k = 0$, où x^0 désigne la fonction constante 1.

2. (b) Fixons $k \geq 0$ et $b > 0$. L'intégration par parties, uniquement sur le segment $[0, b]$, donne

$$\begin{aligned} \int_0^b x^{k+1} e^{-x} dx &= [-x^{k+1} e^{-x}]_0^b + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx \\ &= -b^{k+1} e^{-b} + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx. \end{aligned}$$

On sait déjà que les deux intégrales généralisées convergent. De plus, $b^{k+1} e^{-b} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Le passage à la limite donne $I_{k+1} = (k+1)I_k$.

On a $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Par récurrence, $I_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, y compris $I_0 = 0! = 1$. Aucune fonction spéciale n'est nécessaire.

3. Pour $x \geq 0$, $1 - F_n(x) = (1 + x/n)^n e^{-x}$. Le binôme de Newton donne une somme finie :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}.$$

Chaque fonction $x^k e^{-x}$ possède une intégrale convergente d'après 2. (a). La linéarité d'une somme finie permet donc de conclure à la convergence de l'intégrale de $1 - F_n$, et d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [1 - F_n(x)] dx &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{I_k}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} k!}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}. \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise $\binom{n}{k}k! = n!/(n-k)! = A_n^k$, formule démontrée par comptage en partie I; elle vaut aussi pour $k = 0$.

La variable T_n est positive et sa densité est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après 1. La partie II s'applique donc : T_n admet une espérance, égale à l'intégrale précédente. Avec I. 4, on conclut

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k} = E(N).$$

Partie VI

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel, préambule : le code d'origine est transcrit en Python en conservant l'initialisation et les bornes de la boucle. La numérotation « VI » est celle du document d'origine. Pour des entrées invalides, la fonction affiche le message et renvoie implicitement None ; les questions portent sur des entrées entières valides.

1. Question adaptée au programme actuel : le dénominateur de la formule est p^q , et non n^q comme imprimé ; le nombre d'éléments disponibles est p . On précise aussi les conventions pour $q = 0$ et $q > p$ et on justifie la formule d'arrangement par des choix successifs.

Pour $p \geq 1$ et $q \geq 0$, la valeur mathématique de z à la sortie de la boucle est

$$f(p, q) = \prod_{j=1}^{q-1} \left(1 - \frac{j}{p}\right),$$

avec un produit vide égal à 1 lorsque $q = 0$ ou $q = 1$.

Si $q = 0$, aucune itération n'est exécutée : la fonction renvoie $1 = A_p^0/p^0$.

Si $1 \leq q \leq p$, les choix successifs d'une liste de q éléments distincts donnent $A_p^q = p(p-1) \cdots (p-q+1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(p, q) &= \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-q+1)}{p^{q-1}} \\ &= \frac{p(p-1) \cdots (p-q+1)}{p^q} = \frac{A_p^q}{p^q}. \end{aligned}$$

Pour $q = 1$, les produits ne comportant aucun facteur valent bien 1, et $A_p^1/p = 1$.

Si $q > p$, la boucle parcourt en particulier $j = p$, car $1 \leq p \leq q-1$. Le facteur $1 - p/p$ est nul ; z devient nul et le reste, même si les facteurs suivants sont négatifs. Le résultat vaut $0 = A_p^q/p^q$ par la convention donnée.

La formule est donc vraie pour tous les entiers $p \geq 1, q \geq 0$. Le calcul en nombres flottants peut produire les arrondis habituels, ce qui ne modifie pas la démonstration de l'identité mathématique.

Le code complet est :

Python

```
def f(p, q):  
    if p <= 0 or q < 0:  
        print("valeurs incorrectes")  
    else:  
        z = 1.0  
        for j in range(1, q):  
            z = z * (1 - j / p)  
        return z
```

La variable j parcourt les indices des facteurs ; z mémorise leur produit. Aucun import n'est nécessaire.

2. Question adaptée au programme actuel : l'algorithme demandé est rédigé en Python. On calcule la somme de I. 4 en utilisant la fonction de la question précédente.

Python

```
def f(p, q):  
    if p <= 0 or q < 0:  
        print("valeurs incorrectes")  
    else:  
        z = 1.0  
        for j in range(1, q):  
            z = z * (1 - j / p)  
        return z
```

```
def esperance(n):  
    if n < 2:  
        print("valeurs incorrectes")  
    else:  
        s = 0.0  
        for k in range(0, n + 1):  
            s = s + f(n, k)  
        return s
```

```
n = int(input("n = "))  
if n < 2:  
    print("valeurs incorrectes")  
else:  
    print(esperance(n))
```

La saisie est supposée être celle d'un entier, comme dans l'énoncé. La variable s contient initialement 0, puis, après l'itération d'indice k , la somme

$$\sum_{j=0}^k A_n^j / n^j.$$

La borne finale exclusive de `range(0, n + 1)` garantit que le dernier terme ajouté est

celui d'indice n ; le terme d'indice 0 est bien inclus. La sortie est donc une valeur numérique de $E(N) = E(T_n)$, soumise aux arrondis des nombres flottants.

Statut des codes : les deux blocs ci-dessus ont été exécutés. La fonction f a été comparée à la formule exacte sur les entiers $1 \leq p \leq 20$ et $0 \leq q \leq p + 3$, y compris les cas de boucle vide et les valeurs $q > p$. Le programme complet, saisie comprise, a été exécuté avec $n = 2$, $n = 3$ et $n = 10$; il affiche respectivement 2.5, 2.8888888888888893 et 4.6602156800000002. Les valeurs de esperance ont aussi été comparées à la somme exacte pour $2 \leq n \leq 30$. Les écarts observés sont inférieurs à 10^{-12} . Les entrées invalides testées affichent le message prévu. Ces contrôles numériques vérifient l'implémentation et ne remplacent pas les preuves.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 3. (e) : remplacement du résultat imprimé faux $\ln(v_n) \sim n \ln(n)$ par $v_n \sim n \ln(n)$, cohérent avec les questions précédentes; le corrigé établit aussi $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.
- Exercice 2, 4. (b) : ajout d'une indication sur les sommes partielles harmoniques. La contradiction est établie par intégration d'inégalités, sans employer un critère de comparaison de séries hors de son cadre probabiliste.
- Exercice 3, préambule : explicitation du caractère fini des définitions et ajout des valeurs $\exp(0) = I$ et $\ln(I) = 0$, nécessaires lorsque A ou une expression intermédiaire est nulle. Toutes les identités matricielles sont démontrées par calcul polynomial, sans théorie générale des fonctions de matrices.
- Problème, partie I, préambule et question 2 : explicitation de l'indépendance et de l'uniformité des tirages avec remise; définition des listes ordonnées d'éléments distincts, convention $A_n^0 = 1$ et indication sur les choix successifs pour rendre le comptage autonome.
- Problème, partie II, question 2 : remplacement de la borne supérieure finie imprimée x par $+\infty$ dans l'hypothèse de convergence, nécessaire pour les questions suivantes.

- Problème, partie II, 2. (d) : restitution de $xP(X > x)$ dans la demande de limite, dont l'événement est incomplet dans le document d'origine.
- Problème, partie VI, préambule et question 2 : Code adapté en Python ; conversion du code et de la demande d'algorithme, avec documentation des commandes utilisées et conservation de la boucle allant de 1 à $q - 1$.
- Problème, partie VI, question 1 : correction du dénominateur n^q en p^q , définition de A_p^q , extension par 0 pour $q > p$, prise en compte de $q = 0$ et distinction entre égalité mathématique et arrondis numériques.