



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques — Option économique

1996

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la suite (d_n) définie par

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

1. a) Calculer d_2, d_3, d_4 et d_5 .
1. b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.
3. On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^t dt$.
3. a) Calculer I_0 , puis exprimer, pour tout entier naturel n , I_{n+1} en fonction de I_n .
3. b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, ed_n = n![1 + (-1)^n I_n]$.
3. c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| d_n - \frac{n!}{e} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.
3. d) Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n pour $n \geq 2$, puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la question 1. a) et calculer d_{10} .

Exercice 2

Partie I

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer J^2 , puis, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J .
2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$.

Partie II

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n , il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n + 1$, soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note A_n l'événement «le mobile se trouve en A à l'instant n », B_n l'événement «le mobile se trouve en B à l'instant n » et C_n l'événement «le mobile se trouve en C à l'instant n ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout n entier naturel, déterminer $a_n + b_n + c_n$.

2. a) Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

2. b) Dédire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad \text{et} \quad a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$

3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0.

3. a) Calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

3. b) Vérifier que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n .

3. c) Démontrer ce résultat.

4. Expliquer comment retrouver, grâce à une méthode analogue à celle employée dans la troisième question, les deux autres colonnes de M^n (aucun calcul n'est demandé).

Exercice 3

1. Montrer que : $\forall t > 0, \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

2. a) Pour tout réel x , calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .

2. b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. a) Pour tout réel x , vérifier que : $f(x) = 1 - f'(x) - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

En déduire, en fonction de f , une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

3. b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et donner sa valeur.

4. Soit α un réel et g la fonction définie par : $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = \alpha f(x)$ si $x \geq 0$.

Déterminer α pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X .

Problème

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Étudier f et résumer cette étude par un tableau de variations.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$, pour tout réel x strictement positif.

Partie II

On considère l'algorithme suivant, où n est un entier naturel. La commande `input` lit une valeur saisie ; `int` et `float` la convertissent respectivement en entier et en réel. La fonction `np.log(x)` renvoie le logarithme népérien d'un réel strictement positif. `range(1, n + 1)` parcourt les entiers de 1 à n , et est vide pour $n = 0$. `return` renvoie le résultat d'une fonction ; `print` affiche les valeurs indiquées.

Python

```
import numpy as np

def f(x):
    if x > 0:
        resultat = x - np.log(x)
    return resultat

n = int(input("n = "))
a = float(input("a = "))
u = a
p = a
for k in range(1, n + 1):
    u = f(u)
    p = p * u
print(u, p)
```

1. Dans le cas particulier où $n = 3$ et $a = 2$, donner les valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut des contenus des variables u et p à la fin de l'algorithme.

Dorénavant, dans le cas général, on note u_n et p_n les contenus respectifs des variables u et p à la fin de l'algorithme, lorsque leur calcul est possible.

2. a) Pour quelles valeurs de a peut-on définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont le premier terme est $u_0 = a$ et dont le terme général u_n est calculé par l'algorithme précédent ?
2. b) Pour les valeurs de a trouvées ci-dessus, donner, en fonction de n , le nombre d'appels à la fonction f utilisés au cours de cet algorithme, ainsi que le nombre de soustractions, de multiplications et d'affectations nécessaires au calcul de u et de p .

On ne compte ni les entrées-sorties, ni les importations, ni les affectations des données n et a , ni les liaisons des paramètres de fonction et de la variable de boucle k . En revanche, on compte les initialisations $u = a$ et $p = a$. Chaque appel à f effectue une affectation à $resultat$ et une soustraction; `return` ne constitue pas une affectation. On précisera séparément le nombre d'évaluations de `np.log`.

3. Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, écrire, pour tout entier naturel n , la relation liant u_{n+1} et u_n .
4. Pour quelle valeur de a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?
5. On suppose, dans cette question, que $a > 1$.
 5. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.
 5. b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 5. c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
6. On suppose, dans cette question, que $0 < a < 1$.
 6. a) Montrer que $u_1 > 1$.
 6. b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Partie III

1. En considérant $\ln(p_n)$, exprimer p_n en fonction seulement de a et u_{n+1} , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
2. Écrire alors un nouvel algorithme en Python, ne contenant aucune multiplication et permettant le calcul de p_n .

On pourra utiliser `np.exp(x)`, qui renvoie l'exponentielle du réel x .

Partie IV

Dans cette partie, on choisit $a > 1$.

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \int_{u_{n+1}}^{u_n} f(t) dt$.

1. Vérifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+2} \ln(u_n) \leq v_n \leq u_{n+1} \ln(u_n).$$

2. b) En déduire que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(u_n)$.